Die Geometrie für Bürger- und Sonntags-Schulen,

als

Zweytes Bändchen

des

für die großherzogliche Geometrie- und Zeichenschule zunächst bestimmten Lehrbuches.

Von

Johann Schön,

der Philosophie Doktor, öffentl. und ordentl. Professor der Mathematik, dirigirendem Mitgliede des Ausschusses des genannten Bildungsinstitutes und Ehrenmitgliede der Gesellschaft zur Vervollkommnung der Künste und Handwerke.

Würzburg,
gedruckt bey Carl Philipp Bonitas
1812.

Inhalt.

(Die beygesetzten Numern bedeuten die §§. des Buches.)

Begriff einer ausgedehnten, stetigen, ins Unendliche theilbaren Größe 1. — Begriff des Raumes und des geometrischen Körpers 2. — Was Fläche, Linie und Punkt sey 3. — Von den Abmessungen ebend. — Begriff und Eintheilung der Geometrie 4.

Erklärung der verschiedenen Linien, Flächen und Figuren 5. 6. — Was reguläre 17. — gleiche, ähnliche, kongruente Figuren seyen. Erklärung der Kreislinie und der sich hierauf beziehenden Begriffe 7. — Konstruktion der Eylinie, der Schneckenlinie, der Schlangenlinie 8. — Der Ellipse 8 und 18. — Was Parallellinien seyen? 9. — Was senkrechte, und wie sie konstruirt werden 11. 15.

Begriff des Winkels, und dessen Maßes 11. — Was Nebenwinkel seyen, was ein rechter oder schiefer, hohler oder erhabener, stumpfer und spitzer, Supplement- und Complement-Winkel, und was Scheitelwinkel seyen 12. — Wahrheiten rücksichtlich der 2 letztern ebend. und rücksichtlich der Winkel, welche entstehen, wenn 2 gerade Parallellinien von einer geraden Linie geschnitten werden 13, — und rücksichtlich der Peripherie- und Centri-Winkel 14.

Eintheilung und Konstruktion der Dreyecke 18. — Einige besondere sowohl, als allgemeine Eigenschaften der Dreyecke 19. — Wahrheiten in Betreff der Kongruenz 29. — der Gleichheit 25. — Aehnlichkeit der Dreyecke und anderer Figuren 27.

Erklärung und Konstruktion der Vierecke 20, — der regulären Vielecke 22. — Verhältniß der Umfänge und Flächenräume der Figuren 29. 30. — Die Ausmessung der Figuren 32. — Das Verjüngen oder Vergrößern derselben 31. — Das Verwandeln derselben in andere gleiche Figuren 26.

Wahrheiten in Absicht auf den Kreis 21. 30. — Aus dem gegebenen Durchmesser die Peripherie, und umgekehrt aus der gegebenen Peripherie den Durchmesser zu finden 33. — Die Kreisfläche auszumessen ebend.

Das Linial und Prüfung desselben 5. — Das Parallellinial 9. — Dessen Gebrauch zur Theilung der Linien 10. — Der Zirkel 7. — Haar- und Feder-Zirkel 10. — Der Winkelhacken, Prüfung und Gebrauch desselben 14. 15. — Die Setzwage 9. — Der Transporteur 15. — Das Astrolabium und der Quadratstock ebend. — Der verjüngte Maßstab und Konstruktion desselben 28.

Eintheilung der Körper und Erklärung der sich darauf beziehenden Ausdrücke 34. — Die regulären Körper 35. — Erklärung und Ausmessung a) des Würfels 37; b) der Prismen 38; c) des Cylinders 39; der Pyramiden und der Kegel 40; d) der Kugel 41.

Einleitung in die Geometrie.

Eigenschaften der geometrischen Größen überhaupt.

§. 1. Man nennt ein Ding oder eine Größe z. B. ein Brett, eine Mauer ausgedehnt, in so fern die Theile des Dinges außerhalb einander und nebeneinander liegen. Um daher zu bestimmen, wie groß solche Dinge seyen, z. B. wie lang das Brett, wie hoch die Mauer sey, bedienen wir uns solcher Größen, die wieder ausgedehnt sind, z. B. eines Fuß — oder Ruthenmaßes.

Diese ausgedehnten Größen heißen auch stetige, ununterbrochen fortlaufende Größen, in wiefern das Ende des einen Theiles zugleich der Anfang des andern Theiles ist, im Gegentheile heißen sie abgesonderte Größen. So ist ein Kornhaufe zwar auch eine ausgedehnte Größe, allein

keine stetige Größe; denn, wenn gleich da, wo ein Korn aufhört, sogleich wieder das andere Korn anfängt, so ist doch das Ende des einen Kornes, gleichsam dessen Hülse, nicht zugleich der Anfang, oder die Hülse des folgenden Kornes. Dagegen betrachte man z. B. Fig. 1. die Linie bc, denke sich diese durch den Punkt in a in 2 Theile ab, ac getheilt; so sieht man leicht, daß das Ende, oder die Grenze des Theiles ab, nämlich der Punkt a zugleich Anfang oder Grenze auch des Theiles ac sey.

Auch bemerken wir, daß wir z. B. ein Brett in viele einzelne Brettchen, und diese wieder in kleinere Brettchen theilen oder zerschneiden können; wobey wir uns leicht einbilden können, daß wir, wenn wir noch schärfere Augen und feinere Werkzeuge hätten, die immer kleineren und kleineren Brettchen immer noch weiter theilen könnten. Diese Eigenschaft der ausgedehnten stetigen Größen überhaupt, daß sie sich nämlich unbestimmt weit theilen lassen, hat man die Theilbarkeit ins Unendliche genannt.

Begriff des Raumes und des geometrischen Körpers.

§ 2. Wenn wir irgend einen Körper z. B. einen Würfel, eine Kugel vor uns haben, und davon absehen, daß er aus Metall, oder Holz, oder sonst einer Materie bestehe, diese oder jene Gestalt habe, z. B. rund oder eckig sey; sondern wenn wir uns nur dasjenige an ihm vorstellen, was er mit

allen andern Körpern gemein haben muß, nämlich sein bloses Ausgedehntseyn, den stetigen Zusammenhang seiner Theile und die unbestimmt weit fortsetzbare Theilbarkeit; so haben wir den Begriff von einer Größe, welche man den geometrischen Körper nennt.

Wir können uns ferner bey jedem Körper vorstellen, daß er noch größer und immer größer seyn, oder daß die Ausdehnung des geometrischen Körpers mit der Stetigkeit und unbestimmt weiten Theilbarkeit immer weiter und so über alle Grenzen fortgehen könnte. Dadurch erhalten wir denn die Vorstellung vom Raume, als einer einzigen, ausgedehnten, stetigen, unbestimmt weit theilbaren und rings um uns unbegrenzten Größe.

Von diesem ganzen Raume ist daher jeder geometrische Körper selbst nur ein größerer oder kleinerer Theil, dadurch entsprungen, daß ich mir den Raum so und nicht anders begrenzt denke.

Begriff von der Fläche, Linie und dem Punkte, und von den verschiedenen Abmessungen.

§. 3. Die Grenze eines geometrischen Körpers heißt geometrische Fläche, auch Oberfläche. So macht eine einzige krumme Fläche die ganze Oberfläche oder Grenze der Kugel aus, allein der Würfel hat 6 Flächen zur Grenze. Ferner heißt die Grenze der Fläche geometrische Linie, und die Grenze der Linie heißt geometrischer Punkt.

Man betrachte z. B. die obere Fläche eines viereckigen Tisches; so sieht man, daß 4 Linien am Umfange diese Tischfläche begrenzen, und daß eben diese Linien sich in Punkten endigen, oder von Punkten begrenzt werden.

Man macht oder unterscheidet Theile an irgend einer geometrischen Größe, in so ferne man dieselbe begrenzet. Wenn wir z. B. in der Linie ab Fig. 1. noch einen Punkt, wie a, bemerkten oder setzten; so würden wir statt der 2 Theile ab, ac 3 Theile dieser Linie haben oder unterscheiden. Da nun der geometrische Körper Flächen zur Grenze hat, so sieht man, daß der Körper nur durch Flächen theilbar sey. Eben so theilt man die geometrische Fläche nur durch Linien, und diese durch Punkte; der Punkt selbst ist daher untheilbar, indem er die Grenze alles Ausgedehnten im Raume ist.

So viele Grenzen man ferner an einer geometrischen Größe unterscheiden kann, so viele Abmessungen, oder Dimensionen hat dieselbe. Der Punkt hat daher auch keine Abmessung, oder ist unmeßbar. Allein der geometrische Körper hat 3 Abmessungen nach der Länge, Breite und Dicke. Man bedient sich zuweilen auch der Ausdrücke: Weite, Höhe, Tiefe; so spricht man: eine 8 Schuh lange, 4 Schuh hohe und 1 Schuh dicke Mauer; eine 10 Fuß lange, 4 Zoll im Lichten weite, und 1 Zoll im Metall dicke Röhre; ein 40 Schuh tiefer Bronnen.

Die geometrische Fläche hat 2 Abmessungen, oder ist nach der Länge und Breite ausgedehnt;

die geometrische Linie endlich ist blos nach der Länge ausmeßbar.

Begriff und Eintheilung der Geometrie.

§. 4. Die Geometrie ist die Wissenschaft vom Raume überhaupt, oder von den ausgedehnten, stetigen Größen, nämlich den geometrischen Körpern, Flächen und Linien; diese Wissenschaft macht uns nämlich mit den Eigenschaften dieser Größen bekannt, und lehrt sie uns ausmessen.

Die Geometrie hat daher drey Theile: nämlich 1) die Linien- oder Längen-Lehre, Longimetrie; 2) die Flächen-Lehre oder Planimetrie; 3) die Körperlehre oder Stereometrie.

Der Geometrie
Erster und Zweyter Theil,
oder
die Longimetrie in Verbindung mit der Planimetrie.

I. Von den Linien und Flächen im Allgemeinen.

§. 5. Man nennt eine Linie gerad (Fig. 1.), wenn ihre Theile alle nach derselben Richtung zu

liegen; krumm ist die Linie (Fig. 2.), wenn keiner ihrer Theile gerad ist; eine gemischte Linie (Fig. 3.) besteht aus geraden und krummen Linien. Wenn eine Linie aus verschiedenen geraden oder krummen Linien zusammengesetzt ist, wie Fig 4 und 5, so nennt man sie gerad- oder krummgebrochen.

Die Lage einer geraden Linie wird durch 2 gegebene Punkte so bestimmt, daß man eine zwischen denselben gezogene gerade Linie auf beyden Seiten soweit verlängern kann, als man will. Eine gerade Linie stellt die Schärfe eines guten Linials vor; legt man nämlich diese Schärfe an 2 gegebene Punkte an, und zieht mit einer feinen Reißfeder, oder mit einem gut zugespitzten Bleystifte eine Linie längst dieser Schärfe; so hat man auf dem Papiere eine gerade Linie verzeichnet.

Ob aber das Linial richtig sey, prüft man so: nachdem man von der Schärfe z. B. ab Fig. 11. (welche Figur 2 verbundene Liniale vorstellt) eine feine Linie gezogen hat, kehrt man dasselbe so um, daß das Ende zur Rechten b nun der Anfang zur Linken werde. Man drückt nun das Linial an jene gezogene Linie genau an, und zieht wieder eine feine Linie; fallen dann beyde Linien zusammen; so ist das Linial gut; beugt aber die eine von der andern da oder dort aus; so ist das Linial unrichtig.

§. 6. Die Fläche ist entweder eben oder krumm; eben ist sie, oder schlechthin eine Ebene, wenn jede gerade Linie, welche man zwischen je 2 in ihr angenommenen Punkten ziehen kann, ganz

in derselben Fläche liegt; krumm heißt sie, wenn keiner ihrer Theile eben ist, wie die Oberfläche einer Kugel. Diesem strengen Begriffe von einer Ebene suchen wir uns im bürgerlichen Leben am meisten dadurch zu nähern, daß wir die Flächen gewisser Körper schleifen oder poliren.

Wenn man eine Fläche durch Linien völlig begrenzt; so entsteht das, was man Figur nennt; welche daher, wie die Fläche selbst, entweder eine ebene, oder krumme Figur ist. In Rücksicht der sie begrenzenden Linien wird sie hauptsächlich entweder eine geradlinige oder krummlinige Figur genannt. Die Figg. 32. 35., 36. . . . 41 stellen ebene geradlinige Figuren, aber die Figg. 6. 7. ebene krummlinige Figuren vor. Jene Linien, welche die Flächen begrenzen, heißen Seiten der Figur. Nach der Anzahl dieser Seiten erhält die Figur ferner den Namen einer dreyseitigen, oder vierseitigen, oder fünfseitigen . . . Figur. Eine Figur, welche mehr als 4 Seiten hat, nennt man überhaupt vielseitige Figur, oder ein Polygon.

§ 7. Zu den für uns besonders merkwürdigen krummen Linien, oder Curven, gehören folgende:

Erstens die Kreislinie Fig. 6. Diese ist diejenige Curve, deren Punkte alle, wie a, b, e, von einem Punkte c innerhalb der Ebene, um welche jene Linie gezogen ist, gleichweit abstehen. Der Punkt c heißt der Mittelpunkt (Centrum); die gleichen geraden Linien, von den Punkten der Kreislinie zum Mittelpunkte gezogen, wie ac, bc,

ec u. s. w. heißen die Halbmesser (Radien); gerade Linien, wie ae, bd, von einem Punkte der Kreislinie zu einem andern durch den Mittelpunkt c gezogen, nennt man Durchmesser der Kreislinie Theile der Kreislinie heißen Bogen derselben

Die von der Kreislinie begrenzte ebene Fläche selbst heißt der Kreis; ein Theil desselben, wie acb, oder bce, welcher zwischen 2 Halbmessern und einem entsprechenden Bogen enthalten ist, heißt Kreisausschnitt; aber ein Theil der Kreisebene, wie agba, welcher nämlich zwischen einem Bogen (agb) und der an diesen Bogen gespannten Linie ab, welche Sehne dieses Bogens heißt, enthalten ist, nennt man Kreisabschnitt. Jeden Durchmesser ae, oder bd theilt den Kreis in 2 gleiche Abschnitte, welche Halbkreise heißen; eben so pflegt man auch selbst die halbe Kreislinie, wie bad, zu nennen, der vierte Theil des Kreises oder der Kreislinie hat den eigenen Namen: Quadrant.

Man pflegt bey uns die Kreislinie, welche auch Kreisumfang oder Peripherie des Kreises heißt, in 360 gleiche Theile oder Grade zu theilen; jeder Grad wird wieder in 60 gleiche Theile, welche Minuten heißen, und jede Minute wieder in 60 Sekunden getheilt. Der Halbkreis hat demnach 180 Grade, der Quadrant 90. Das Zeichen für den Grad ist o, das für die Minute ein Strich u. s. w.; statt z. B zu schreiben 3 Grad, 4 Min. 6 Sek., schreibe ich blos 3° 4′ 6″. Die Anzahl Grade ist zwar bey allen Kreislinien, großen und kleinen, einerley; allein eine größere Kreislinie hat größere Grade;

z. B. in Fig. 15., welche 2 Kreise mit demselben Mittelpunkte C, d. i. 2 konzentrische Kreise vorstellt, ist sowohl AE, als ae ein Quadrant, oder jeder dieser Bogen hat 90°, aber AE hat größere, ae kleinere Grade.

Die Größe der Kreislinie richtet sich übrigens genau nach der Größe ihres Halbmessers; wäre z. B. CA Fig. 15. dreymal größer, als ca; so wäre auch die äußere Kreislinie genau 3mal größer, als die kleinere. Will man daher mit Hilfe des Zirkels eine noch einmal so große Kreislinie ziehen; so muß man die Schenkel des Zirkels nach der Größe des Durchmessers einer vorgegebenen Kreislinie öffnen; setzt man dann in irgend einem Punkte den einen Schenkel ein, und führt die in dem anderen Schenkel eingesteckte Bley= oder Reißfeder umher; so wird die eine Kreislinie noch einmal so groß werden, als die vorgegebene.

Zu einem guten Handzirkel gehört, daß 1) die Füße unten scharf zugespitzt, 2) daß dieselben aus gutem Stahle gearbeitet seyen; 3) daß sich beyde Schenkel des Zirkels für jede beliebige Oeffnung fest stellen lassen.

§ 8. Zweytens das Oval. Dahin gehör 1) eine Art eingedrückten Kreises, welches Oval man Ellipse nennt; 2) das eigentliche Oval oder die Eylinie. Das erste Oval wird durch Fig 7. 1ste vorgestellt. Man kann die Ellipse mechanisch beschreiben, wenn man in irgend 2 Punkten f und F Stifte fest einsteckt, um diese Stifte einen doppelten geschlossenen Faden von willkührlicher Länge z. B. so lange, als ab, umherlegt, und dann an der ei=

nen wohl und immer gleich gespannten Hälfte a g b dieses Fadens eine Bleyfeder umherführt. Jene 2 Punkte f, F heißen die Brennpunkte, a b die große Axe, und e g die kleine Axe der Ellipse. Die besondere Gestalt dieses Ovals hängt übrigens von dem Abstande der 2 Stifte von einander und der Länge des doppelten Fadens ab.

Man findet unten im §. 18. noch eine andere Art, die Ellipse zu zeichnen.

Die Eylinie wird durch Fig. 7. 2te vorgestellt. Man ziehe aus c einen halben Kreis g a f; setze den Zirkel in g ein und öffne ihn bis f, ziehe die Linie f h e; eben so, indem man die Zirkelspitze in f einsetzt, ziehe man g i e. Die ganze Linie a e halbire man, und theile jede Hälfte wieder in 2 gleiche Theile; so wird e d der 4te Theil seyn von a e. Man ziehe dann die gerade mit f g gleichlaufende Linie h i so, daß h i eben jenem 4ten Theile d e gleich wird. Wenn man nun vollends aus d durch die Punkte h, i den kleinen Kreisbogen h i zieht; so entsteht die Eylinie a f h i g a.

Drittens eben so leicht zeichnet man die sogenannte Schlangenlinie Fig. 7. 3te, indem man auf einer geraden Linie a b willkührlich gleiche Theile wie a m mit dem Zirkel absticht; dann jeden Theil halbirt, und aus den Halbirungspunkten, wie o und r Kreisbogen zieht. Es erhellt aus der Figur, wie man die gezeichnete doppelte Schlangenlinie erhalte.

Viertens die Spiral- oder Schneckenlinie Fig. 8. Um diese zu verzeichnen, theile man die gerade Linie a b, über welche sie gezeichnet wer-

den soll, in 2 gleiche Theile, und ziehe aus dem Halbirungspunkte c den Halbkreis a g b. Den Halbmesser ac aber theile man in soviele gleiche Theile, als man Umgänge der Spirale haben will; hier also in 3 gleiche Theile versuchsweise mit Hilfe des Handzirkels. Dann ziehe man durch jene Theilpunkte d und e aus c oberhalbs 2 halbe Kreislinien. Endlich halbire man auch bey f die Weite ce, und ziehe aus f die 3 anderen Halbkreise unterhalbs ab.

§. 9. Linien, welche, so weit man sie auch verlängert denken mag, nicht zusammenstoßen, werden Parallellinien genannt; Fig. 9. stellt sowohl gerade, als krumme Parallellinien vor Alle diese Linien stehen in allen ihren Punkten gleichweit voneinander ab, oder sind gleichlaufend. In eben diesem Sinne sagt man, daß 2 Wände, oder 2 Mauern einander parallel oder gleichlaufend seyen. Von 2 nicht parallelen Linien a, b sagt man, daß sie nach der Seite N auseinandergehen, oder divergiren, nach der Seite O aber konvergiren.

Eine gerade Linie oder Ebene, welche mit der ebenen Fläche eines stillestehenden Wassers parallel oder gleichlaufend ist, nennt man horizontal, wasserbaß, auch wagrecht. Um zu sehen, ob irgend ein Ding, durchaus eine horizontale Lage habe, bedient man sich der sogenannten Setzwage Fig 10. Diese besteht aus 3 beynahe gleichlangen glatt gehobelten und zusammengefügten Leisten, mit einer Querleiste de. Aus der Spitze g des Instrumentes hängt ein Bleyloth gf an einem feinen Faden herab. Wenn dieser Faden genau über den Punkt c wegspielt, oder wenn das Bley f in die

in der untersten Leiste AB befindliche Höhlung trifft; so hat die Unterlage der Setzwage eine horizontale Lage, oder ist wasserbaß.

Gerade parallele Linien kann man auf 3ley Art auf dem Papiere oder sonst einer kleinen Ebene ziehen: 1) mit Hilfe des Parallelinials Fig. 11. 1ste, welches aus 2 Linialen besteht, welche durch 2 gleiche Querleistchen bey jeder Oeffnung immer in gleichem Abstande voneinander erhalten werden, so, daß die an ab und cd gezogenen Linien parallel werden; — oder 2) mit Hilfe zweyer hölzernen Brettchen, welche die Gestalt haben, wie sie Fig. 11. 2te zeigt; indem man nämlich das eine Brettchen A fest aufdrückt und das andere B daran verschiebt, werden alle Linien, wie de, dc und gn parallel; — 3) mit Hilfe des Handzirkels: wenn man nämlich mit der geraden Linie ab Fig. 12. durch den Punkt c eine Parallele ziehen soll; so setzt man die eine Zirkelspitze in eben diesem Punkte ein und zieht einen die Linie ab blos berührenden Bogen ge; mit derselben Zirkelöffnung zieht man z. B. aus f auch oberhalbs einen Bogen; so wird dann die vom Punkte c ausgezogene gerade Linie ch, welche den letzten Bogen nur berührt, die gesuchte parallele Linie zu ab seyn.

Verschiedene hieher gehörige Aufgaben.

§. 10. 1. Man soll eine gegebene gerade Linie ab Fig 13. z. B. in 4 gleiche Theile theilen. Man thut dieses, indem man versuchsweise mit dem Handzirkel, besser noch mit einem Haar- oder Fe-

derzirkel, eine solche Oeffnung der Schenkel eines dieser Zirkel sucht, daß man den Zirkel genau 4mal auf ab fortschlagen kann. Oder man sucht erst die Hälfte von ab, und dann von jeder Hälfte wieder die Hälfte.

Dieses zum Theil unangenehme, zum Theil fehlerhafte Versuchen, die Linie ab zu theilen, vermeidet man dadurch, daß man durch a willkührlich eine gerade Linie zieht, auf dieser mit willkührlicher Zirkelöffnung 4 gleiche Theile aufträgt, den letzten Theilpunkt p mit dem anderen Endpunkte b durch die gerade Linie pb verbindet; so werden dann die mit pb durch die Theilpunkte m, n, o parallel gezogenen geraden Linien mc, nd, oe die Linie ab ebenfalls in 4 gleiche Theile theilen. Würde man auch durch den Endpunkt b eine gerade, mit ap parallele Linie ziehen, und auf dieser wie auf jener den Zirkel 4mal fortschlagen; so würde ab schon dadurch in 4 gleiche Theile getheilt, daß man die Theilpunkte m und s, n und q, o und r blos durch gerade Linien verbände.

2. Wenn aber die Linie ab Fig. 14. nach gegebenem Verhältniße, d. i so getheilt werden sollte, daß der zweyte Theil z. B 2mal, der 3te dreymal größer, als der erste wäre, oder daß sich die Theile, wie 1 zu 2 zu 3 verhielten; so trüge man, weil jene Zahlen zusammen 6 machen, auf der Linie ac 6 gleiche Theile mit willkührlicher Zirkelöffnung auf, und zöge dann, wie vorhin, gerade oder parallele Linien nur durch den 1ten, 3ten und 6ten Theilpunkt, wie die Figur deutlich zeigt.

3. Um eine gegebene Kreislinie in ihre 360° zu

theilen, theilt man jeden Quadranten, wie A E Fig. 15., in 90° auf folgende Art: Man fasse mit dem Zirkel den Halbmesser A C, setze den einen Zirkelfuß in A, bemerke auf welchen Punkt der Kreislinie der andere Fuß trifft, und schreibe die Zahl 60 bey. Dann halbire man den Bogen A e in d und schreibe 30 bey; so hat man nun 3 gleiche Theile Jeden dieser Theile theile man wieder in 2 gleiche Theile und schreibe bey 15°, 45°, 75°; jeden von diesen 6 gleichen Theilen theile man wieder in 3 gleiche Theile, und jeden dieser Theile endlich in 5 gleiche Theile; so ist der erste Quadrant in seine 90 Grade getheilt. Auf dieselbe Art verfahre man mit jedem andern Quadranten, nur daß man die gehörigen höheren Zahlen beyschreibt.

II. Von den geradlinigen Winkeln und den geraden senkrechten Linien.

§ 11. Wenn man sich vorstellt, daß 2 gerade Linien a c, a e Fig. 16. so aufeinander liegen, daß sie als eine Linie gelten, daß sich dann aber die eine z. B. a e von der andern a c, indem sie mit dieser blos den Punkt a gemein behält, in derselben Papierebene unbestimmt weit entferne, z. B. in die Lage a d komme, während einer ihrer Punkte z. B. d beym Ausweichen den Bogen b d beschreibt; so stellt man sich 1) das Entstehen dessen vor, was man geradlinigen Winkel, oder schlechthin Winkel nennt, nämlich die Ausweichung einer geraden Linie von einer anderen vom gemeinschaftlichen Punkte a aus,

als dem Scheitel des Winkels, oder die Neigung dieser Linien zum Punkte a; diese Linien a', ac selbst nennt man die Schenkel des Winkels; man sieht 2) ein, warum man sagt, daß ein Kreisbogen bd, welcher aus dem Scheitel a mit willkührlichem Halbmesser gezogen wird, das Maß des Winkels sey; indem offenbar der Bogen bd größer werden muß, je mehr ae von ac abweicht. Allein auch ein an a näherer Punkt n hätte bey dem Ausweichen der Linie ae den Bogen mn beschreiben können, so, daß man auch am, an für die Schenkel dieses Winkels hätte nehmen können. Da also hiebey die Abweichung oder Neigung dieselbe, wie bey den längeren Schenkeln geblieben wäre; so sieht man weiter ein, warum weder die Länge der Schenkel, weder die Länge der zwischen ihnen von a aus gezogenen Bogen die Größe des Winkels bestimmt. Die Bogen db, mn nämlich haben bey verschiedener Länge doch einerley Anzahl Grade; indem, wenn z. B. mn gleich 20°, oder der 18te Theil von seiner Kreislinie ist, auch der andere konzentrische Bogen bd der ebensovielste Theil von seiner Kreislinie oder von 360°, also ebenfalls ein Bogen von 20 Graden ist.

Es ist also eigentlich das durch die Anzahl Grade eines kleineren oder größeren Bogens ausgedrückte Verhältniß zu 360° des Winkels Maß.

Man bezeichnet den Winkel entweder durch 3 Buchstaben z. B. dac, wo der am Scheitel in der Mitte stehen muß; oder durch einen Buchstaben a am Scheitel, oder durch r, welcher in der Oeffnung steht.

§. 12. Zwey Winkel m und n Fig. 17. welche einen Schenkel cd gemein haben, und deren 2 andere Schenkel eine gerade Linie acb bilden, heißen Nebenwinkel. Beyde Winkel zusammen haben jederzeit zum Maße die halbe Kreislinie egf, welche man aus dem Scheitel c gezogen denken kann, oder sie machen zusammen 180°, sie mögen nun gleich, oder ungleich seyn. Sind die Nebenwinkel m und n gleich; so heißt ein jeder ein rechter Winkel, und der gemeinschaftliche Schenkel dc heißt das Loth oder die senkrechte Linie auf ab. Es hat also jeder rechte Winkel zum Maße halbmal 180°, d. i. 90°; so ist der Quadrant eg das Maß von m.

Wenn aber die Nebenwinkel, wie r und s Fig. 18. ungleich sind; so nennt man sie schiefe Winkel, und zwar wird der eine r, welcher größer ist, als ein rechter Winkel, oder als 90°, stumpf der andere s, welcher kleiner, als ein rechter ist, spitz genannt. Sowohl der stumpfe, als der spitze Winkel ist ein hohler Winkel, d. i. ein solcher, welcher kleiner ist, als 180°, oder als 2 rechte Winkel, dem hohlen Winkel ist entgegengesetzt der erhabene, welcher größer ist als 2 rechte Winkel. So ist der Winkel bcd Fig. 19. rechts angesehen ein erhabener Winkel, welcher den Bogen mon zum Maße hat; aber r ist der entsprechende hohle Winkel, welcher mit dem erhabenen 360° oder 4 rechte Winkel ausmacht. Dasselbe Maß haben auch alle Winkel m, n, o, s, r zusammen Fig. 18., welche um den Punkt c rechts und links umherliegen, oder diesen Punkt c zum Scheitel haben.

Auch nennt man jede 2 Nebenwinkel, wie r s Fig. 18, die sich zu 2 rechten Winkeln ergänzen, Supplementwinkel, zum Unterschiede von den Complementwinkeln m und r Fig. 20. welche sich blos zu einem rechten ergänzen. Es gilt aber überhaupt die Wahrheit: gleiche Winkel haben gleiche Ergänzungen, und umgekehrt: Winkel, die gleiche Ergänzungswinkel haben, sind gleich; z. B. wenn m = n ist; so ist auch r = s; man setze m = 50°; so hat r 40°; allein auch s hat 40°, da n, wie r, 50° hat.

Man betrachte eben so die sich am Scheitel entgegengesetzten Winkel r und s Fig. 21ste oder m und n, welche man kurz Scheitelwinkel nennt, und welche entstehen, sooft sich 2 gerade Linien schneiden, so sieht man leicht ein, daß jene, wie diese gleich seyen, indem sowohl r als s denselben Winkel n zum Supplementwinkel hat; m aber wird von s, aber auch n von s zu 180°, oder zu 2 rechten Winkeln ergänzt.

§. 13. Rücksichtlich zweyer Parallellinien, welche von einer geraden Linie geschnitten werden, unterscheidet man noch äußere und innere Winkel. Fig. 21. 2te. stellt die Parallelen ab, cd von ef geschnitten vor. Winkel nun, wie v, x, m, n sind äußere; Winkel, o, r, s, p sind innere, oder innerhalb der Parallelen liegende Winkel. Ferner die inneren Winkel q und p, r und s, wovon der eine rechts, der andere links an der schneidenden Linie ef liegt, heißen innere Wechselwinkel.

Da nun offenbar der Theil fo dieser schneidenden Linie zu ab dieselbe Neigung hat, welche oe

oder die ganze Linie fe zur unteren Parallele cd hat; so ist 1) klar, daß der äußere Winkel n gleich ist dem inneren, an derselben Seite liegenden Winkel p. Nun ist 2) aber auch n dem Scheitelwinkel q gleich; also ist auch q gleich p; d. i. die inneren Wechselwinkel sind gleich; 3) r und n zusammen machen als Nebenwinkel 2 rechte Winkel oder 180° aus; also macht auch r mit dem Winkel , welcher gleich n ist, 180° aus, d. i. die inneren Winkel, welche an derselben Seite der schneidenden Linie ef (der Sekante) liegen, machen zusammen 2 rechte Winkel aus.

§. 14. Merkwürdig ist noch die Unterscheidung der Winkel rücksichtlich der Kreislinie oder des Kreises in Centriwinkel und Peripheriewinkel. (So sind in Fig. 22. Taf. II.) die am Mittelpunkte C gebildeten Winkel m und n Centriwinkel, aber r, s, v, deren Scheitel die Punkte e, d und f der Peripherie sind, heißen daher Peripheriewinkel. Von diesen Winkeln ist zu merken, daß sie nur den halben Bogen ab, auf dem ihre Schenkel aufruhen, zum Maße haben; denn je weiter sich der Scheitel des Winkels s vom Bogen ab entfernt, indeß seine Schenkel unverändert auf ab aufstehen, desto enger muß der Winkel, oder desto kleiner muß die Neigung beyder Schenkel zueinander werden. Man stelle sich nun vor, die Punkte C und e lägen senkrecht über der Mitte t des Bogens ab: so wäre der Scheitel e um den Durchmesser, C aber nur um den Halbmesser von ab entfernt, der Winkel s würde sich demnach bey dieser doppelten Entfernung auch noch einmal so stark verengen oder zusammenziehen müssen, als der entsprechende Cen-

triwinkel. So erscheinen uns dieselben Gegenstände z. B. Bäume, Thürme um so kleiner, je weiter wir uns von denselben in einer geraden Richtung entfernen, indem sich die beyden Lichtstrahlen ae, be, welche von den äußersten Punkten a und b eines Gegenstandes ins Aug kommen immer mehr verengen. In einem solchen Falle heißt nämlich s ein Sehewinkel.

Zwar liegt der Scheitel d vom Winkel r dem Bogen ab oder dessen Mitte t näher, als e, ja diese Scheitel, wie d und f können dieser Mitte noch viel näher gerückt gedacht oder auch gezeichnet werden. Demungeachtet haben doch auch alle diese Winkel r und s nur den halben Bogen ab zum Maß; wovon man sich unmittelbar überzeugen kann, indem man den mit dem Halbmesser Ca aus d gezogenen Bogen gi auf ab aufträgt. Was nämlich rücksichtlich des Winkels s die Entfernung seines Scheitels thut, das wird in Ansehung der an ab näher rückenden Winkel durch die schiefe Lage ihrer Schenkel bewirkt. Man stelle sich vor, dem Auge O eines Menschen stehe gerade gegenüber ein senkrecht errichteter Stab mn: so wird der Mensch die Endpunkte dieses Stabes unter dem Winkel mOn sehen. Derselbe Stab aber neige sich nun so, daß er nach einer schiefen Richtung np aus demselben Standpunkte betrachtet werden muß; so wird nun der Sehewinkel nOp viel kleiner werden, als der vorige.

Wenn demnach irgend etwas auf dem Bogen ab vorgienge oder zu sehen wäre z. B. die Handlungen der Schauspieler auf einem Theater, so

würde dasselbe von den herumstehenden Menschen gleichgut gesehen werden, sie möchten auf der Seite in d und f oder gerade gegenüber stehen; indem alle diese Sehewinkel, welche denselben halben Bogen ab zum Maß haben, gleich sind. Hierin liegt der Grund, warum alle solche Gebände, z. B. Theatergebäude, in welchen eine Menge Menschen irgend einen Gegenstand gleich gut sehen soll, am besten kreisrund errichtet werden, oder die Zirkelgestalt haben.

Winkel endlich, deren Schenkel auf den Endpunkten des Durchmessers aufruhen, und deren Scheitel in der Peripherie liegen, wie der Winkel adb Fig 41. oder bdf Fig. 42. heißen kurzweg Winkel im Halbkreise. Solche Winkel sind immer rechte Winkel, weil sie die Hälfte der halben Peripherie, d. i 90° zum Maße haben; so hat adb die Hälfte von aeb zum Maße.

Eine gute Anwendung dieses Winkels macht man zur Prüfung der Güte des sogenannten Winkelhackens, welchen Fig 27. vorstellt. Man verzeichnet sich nämlich irgend eine feine Kreislinie, wie Fig. 41., zieht den Durchmesser ab, und aus irgend einem Punkte d zu a und b die 2 Sehnen da, db. Wenn man nun die Spitze A jenes Instruments an den Punkt d, den einen Schenkel z. B AB an die eine Sehne da genau andrückt; so muß, wenn das Instrument gut ist, der andere Schenkel AC genau an der Sehne db anliegen.

Verschiedene hieher gehörige Aufgaben.

§. 15. 1. Man soll einen auf dem Papiere verzeichneten Winkel messen.

Man bedient sich hiezu des den Reißzeugen gewöhnlich beygelegten sogenannten Transporteurs, welchen Fig. 23. vorstellt, oder eines getheilten Halbkreises aus Messing. Indem man nämlich den Mittelpunkt c des Instrumentes auf den Scheitel eines Winkels, und jenen Durchmesser an den einen Schenkel des Winkels genau anlegt; so schneidet der andere Schenkel auf dem getheilten Kreise einen Bogen, als Maß des Winkels ab.

Um aber einen Winkel auf dem Felde zu messen, bedient man sich des Astrolabiums. Man hat eine deutliche Vorstellung von diesem Instrumente, wenn man sich nur den Transporteur größer und massiver gearbeitet, und auf einen Fuß oder Stativ gesetzt vorstellt; ferner stelle man sich 2 auf dem Durchmesser oder dem Liniale senkrecht errichtete Absehen, oder Diopteru, wie c d und f e Fig. 24., und weiter noch ein um den Mittelpunkt c bewegliches und mit Diopteru ebenfalls versehenes Linial vor. Wollte man sehen, wie groß der Winkel sey, welchen die Sehelinien CB, CA Fig. 25. zweyer Gegenstände B und A an dem Mittelpunkte C des Instrumentes bilden; so visirte man durch die Absehen am Durchmesser z. B. nach A hin; ließe dann das Instrument unverrückt; richtete das bewegliche Linial nach den Gegenstand B, so gäben die vom Liniale abgeschnittenen Grade die Größe jenes Winkels an.

2. Man soll an einem gegebenen Punkte a der gegebenen Linie ab Fig. 26. (Taf. I.) auf dem Papiere einen dem gegebenen Winkel m gleichen Winkel legen, oder konstruiren.

Aus dem Scheitel d ziehe man mit willkührlicher Oeffnung des Zirkels einen Bogen ef; eben so aus a einen Bogen gh; fasse mit dem Zirkel den Bogen ef und trage ihn von g nach i auf gh auf; wenn man nun durch den bemerkten Punkt i und durch a eine gerade Linie ac legt; so wird cab gleich m seyn. Eben diese Aufgabe hätte man auch mit Hilfe des Transporteurs lösen können, indem man den Winkel m gemessen, und dann einen eben so großen Winkel an ab gelegt hätte.

§. 16. 3. Man soll im Punkte c der geraden Linie ab Fig. 28. ein Loth errichten.

Man mache bm gleich cn, oder ziehe von c aus den Bogen mgn; aus den Punkten m und n ziehe man mit willkührlicher Zirkelöffnung 2 sich z. B. in d schneidende Bogen; so ist die von d zu c gezogene gerade Linie das gesuchte Loth. — Ist aber c ein Endpunkt am Rande des Papiers, so daß bc links nicht kann verlängert werden, wie dieß Fig. 29. vorstellt; so zieht man aus c und a 2 sich z. B. in b schneidende Bogen mit derselben Zirkelöffnung; zieht ba, verlängert diese Linie bis d, so, daß bd = ba wird; die von d nach c gezogene gerade Linie ist dann im Punkte c senkrecht auf ca.

Wenn man auf gleiche Weise im Endpunkte b des Halbmessers cb Fig. 6. ein Loth bf errichtet; so ist bf eine die Kreislinie in dem einzigen Punkte b berührende Linie, welche man kurz Tangente nennt.

4. Soll man von einem Punkte c Fig. 30. auf eine gerade Linie oder deren Verlängerung ein

Loth herabfällen; so zieht man wieder aus c den Bogen mn, welcher ab in 2 Punkten m und n schneidet; aus m und n zieht man dann mit derselben Zirkelöffnung entweder oberhalbs oder unterhalbs 2 sich in d oder e schneidende Bogen; so ist dann die von c nach e, oder von c nach d gezogene und bis o verlängerte gerade Linie das gesuchte Loth oder Perpendikel.

Alle diese Aufgaben löst man auch mechanisch mit Hilfe des im §. 14. erwähnten Winkelhackens.

Zwey solche sich senkrecht durchschneidende gerade Linien bilden das rechtwinkliche Kreutz, wie die 2 Durchmesser Fig. 16. Wenn man sich eine solche Kreislinie auf einer kreisrunden Platte mit ihren Durchmessern verzeichnet, und die Endpunkte dieser Durchmesser mit Absehen, wie oben das Astrolabium, versehen denkt; so hat man die Vorstellung von einem Kreutzmaße oder Quadratstocke, dessen man sich auf dem Felde bedient, um senkrechte Linien abzustecken.

Um einen Stab oder eine Mauer senkrecht zu errichten, bedient man sich des sogenannten Senkels oder Senkbleyes, indem man nämlich z. B. an den Stab einen Faden anhält, an dessen Ende ein schwerer Körper befestigt ist.

III. Von den ebenen und geradlinigen Figuren und ihrer Konstruktion.

§. 17. Schon die Ansicht eines Winkels zeigt, daß eine geradlinige Figur, (man vergleiche §. 6.)

wenigstens 3 Seiten zur Grenze haben müsse. Diese Seiten oder Grenzen zusammen heißen der Umfang (Perimeter) der Figur, und diejenige Seite, über welche man sich die Figur errichtet denkt, nennt man die Grundseite (Basis). Jede geradlinige Figur hat ferner soviele Winkel, als sie Seiten hat, indem die erste Seite nicht nur mit der zweyten, sondern auch mit der letzten zusammenstößt. Die durch diese zusammenstoßende Seiten gebildeten Winkel nennt man auch die Ecken der Figur, weßwegen man statt „dreyseitige Figur" spricht: das Dreyeck; eben so das Viereck, Fünfeck, und überhaupt Vieleck (Polygon). Diese Figuren heißen regulär oder regelmäßig, wenn sowohl alle Seiten, als Winkel gleich sind; im Gegentheile irregulär.

Erstens von den Dreyecken.

A. Eintheilung und Konstruktion der Dreyecke.

§. 18. Die Dreyecke werden theils nach den Winkeln, theils nach den Seiten eingetheilt oder genannt.

I. Rücksichtlich der Winkel hat man 1) das rechtwinklige Dreyeck acd Fig. 29., welches einen rechten Winkel hat wo nämlich die 2 Seiten dc, ac, welche den rechten Winkel c einschließen, und Katheten heißen, senkrecht aufeinander stehen. Die dritte und größte Seite da nennt man Hypotenusa. — 2) das stumpfwinklige

Dreyeck efd Fig. 31. mit einem stumpfen Winkel fde. So oft man nämlich einen stumpfen, oder rechten Winkel bildet, und dann die Endpunkte der Schenkel mit einer geraden Linie verbindet; so hat man entweder dieses oder das erstere Dreyeck konstruirt. — 3) das spitzwinklige Dreyeck Fig. 32. mit lauter spitzen Winkeln. Die beyden letzten Dreyecke begreift man auch unter dem Namen „schiefwinklige Dreyecke." — 4) das gleichwinklige Dreyeck Fig. 33. welches lauter gleiche Winkel hat.

II. Rücksichtlich der Seiten ist das Dreyeck a) ein gleichschenkliges, wenn es 2 gleiche Seiten ac, bc Fig. 33. hat, die man Schenkel nennt; — die dritte Seite ab heißt Grundseite; um über diese das Dreyeck zu errichten, ziehe man mit einer Zirkelöffnung, welche größer als die halbe Grundseite ab ist, 2 sich schneidende Bogen, und von c gerade Linien nach a und b. — b) ein gleichseitiges, wenn alle Seiten gleich sind; dieses Dreyeck Fig. 32. konstruirt man über die gegebene Grundseite gh dadurch, daß man wieder, wie vorhin, 2 Schneidebogen, aber mit einer der gegebenen gh gleichen Zirkelöffnung zieht. — c) wenn die Seiten eines Dreyeckes alle ungleich sind; so heißt es ungleichseitig.

Des gleichseitigen Dreyeckes bedient man sich auch, um eine Ellipse (vergleiche §. 8.) über ab Fig. 34. zu beschreiben. Man theile ab in 3 gleiche Theile in c und d, errichte über cd die gleichseitigen Dreyecke ced, cdf, deren Seiten man zu-

gleich verlängert. Mit der Zirkelöffnung c a ziehe man aus c einen Bogen g a i, eben so aus d den Bogen h b k; dann aus e, als Mittelpunkte, mit dem Halbmesser e i den Bogen i k, und aus f eben so den Bogen g h; so hat man das verlangte Oval.

Noch ist in Ansehung eines jeden dieser Dreyecke das zu bemerken, was man ihre Höhe nennt. Wenn man nämlich irgend eine Seite eines Dreyeckes als Grundseite annimmt; so ist der Scheitel des dieser Grundseite gegenüber stehenden Winkels die Spitze des Dreyeckes, und der kürzeste Abstand dieser Spitze von der Grundseite, oder das von der Spitze auf die Grundseite oder auf ihre Verlängerung herabgefällte Loth, heißt die Höhe des Dreyeckes. Da in dem gleichschenkligen Dreyecke Fig. 33. a b die Grundseite, folglich der Scheitel c die Spitze ist; so ist das Loth c d die Höhe. Aber wenn man bey Fig. 31. f e als Grundseite annimmt; so ist d h die Höhe; nimmt man d e zur Grundseite; so ist f g die Höhe.

Auf dieselbe Weise ist auch, wenn man z. B. von der Hohe eines Thurmes, Hauses oder eines schiefgewachsenen Baumes spricht, in allen diesen und ähnlichen Fällen, das Loth, von der Spitze oder dem höchsten Punkte eines dieser Gegenstände auf die horizontale Ebene gezogen, die Höhe des Gegenstandes. Die Länge dieses Lothes nämlich findet man gewöhnlich mit Hilfe eines Fadens oder einer Schnur, an deren Ende ein Bley angehängt ist.

B. Einige besondere sowohl als allgemeine Eigenschaften der Dreyecke.

§. 19. 1. Der äußere Winkel eines Dreyeckes, welcher an ihm, wie an jeder geradlinigen Figur, entsteht, wenn man eine Seite verlängert, z. B. der Winkel c b d Fig. 35. ist gleich der Summe der 2 inneren Winkel m und n, welche dem äußeren entgegenstehen. Denn man stelle sich be parallel mit ac gezogen vor; so werden diese 2 Parallelen von bc geschnitten, es sind also die inneren Wechselwinkel m und r gleich (§. 13.); dieselben Parallelen werden aber auch von ab d geschnitten, daher ist der äußere Winkel s gleich dem inneren n. Demnach sind die Theile des äußeren Dreyeckswinkels, nämlich r und s gleich m und n, d. i der ganze äußere Winkel ist gleich der Summe dieser beyden Winkel m und n.

2. Man stelle sich nun aus b, als dem Mittelpunkte, einen Halbkreis beschrieben vor, so sieht man sogleich, daß die 3 Winkel o, r, s zusammen jenen Halbkreis oder 180° zum Maß haben. Da nun, wie wir vorhin zeigten, $r = m$, und $s = n$; so machen auch $o + m + n$ d. i. die 3 inneren Winkel des Dreyeckes 180°, oder 2 rechte Winkel zusammen aus.

Hieraus begreift man denn, warum in keinem geradlinigen Dreyecke mehr, als ein rechter oder stumpfer Winkel seyn könne, indem 2 rechte Winkel schon für sich 2mal 90°, oder 180° ausmachen würden, ein dritter Dreyeckswinkel demnach unmöglich wäre.

Es folgt aus jener Wahrheit ferner, daß man in jedem Dreyecke, wenn man einen Winkel weiß, man auch a) die Summe der 2 andern Winkel kenne; ist z. B. in Fig 35 der Winkel c = 40°; so haben die 2 W. a und b 180° — 40°, d. i. 140° zusammen; — b) man weiß umgekehrt aus der Summe von 2 Winkeln den dritten Winkel; — c) man weiß, daß in einem gleichwinkligen Dreyecke jeder Winkel das Drittel von 180°, oder 60° zum Maße habe.

3. Zwey Seiten eines Dreyeckes sind zusammengenommen größer, als die dritte. Man betrachte z. B. das Dreyeck dhe Fig. 31. Gleichwie nun der gerade Weg vom Orte oder Punkte d zum Punkt e der kürzeste ist; so wird auch jede gebrochene Linie dhe von d durch irgend einen Punkt h, und dann erst zu e gezogen größer oder länger seyn müssen, als die gerade Linie de; oder die Seite de ist kleiner, als ah + he.

4. Im gleichschenklichen Dreyecke Fig. 33. sind die Winkel m, n an der Grundseite ab gleich. Denn da ca eben so lang ist als der Schenkel cb desselben Winkels; so müssen beyde Schenkel einerley Neigung zur dritten Linie ab, welche die Figur schließt, haben.

Wenn man also die Größe des Winkels an der Spitze c kennt; so weiß man auch die Größe sowohl von m, als von n; und ist einer von diesen letzten Winkeln bekannt, so weiß man auch jeden der andern Winkel.

Es folgt weiter hieraus, daß das gleichseitige Dreyeck auch gleichwinklig, daher

unter allen Dreyecken die einzige reguläre Figur sey. Denn da ig = ih Fig. 32.; so ist, wie vorhin, auch der Winkel g = h; — eben so, weil gh = gi ist auch der Winkel h = i, oder g = h = i; d. i. alle 3 Winkel sind gleich.

5. Der größeren Seite eines Dreyeckes steht auch ein größerer Winkel gegenüber, und — umgekehrt. In Fig. 36. sey die Seite ce größer, als cd; so wird auch der Winkel cde größer seyn, als der W. e, welcher der kleineren Seite gegenüberliegt. Denn wenn man den Theil cf gleich cd macht; so sind die Winkel m, n an der Grundseite df des nun gleichschenkligen Dreyeckes gleich. Nun ist in Beziehung auf das Dreyeck def *n* ein äußerer Winkel, also (nach 1.) gleich i + e; folglich ist auch m = i + e, d. i. schon ein Theil m von dem ganzen Winkel cde ist größer, als e; um so mehr ist der ganze Winkel größer, als der W. e. — Wenn ferner umgekehrt ein Winkel cde größer ist, als ein anderer e; so ist auch die jener gegenüberstehende Seite ce größer, als cd. Denn wäre ce = cd; so müßte der ganze Winkel d = e seyn (nach 4.), was gegen die Annahme ist: wäre aber sogar ce kleiner, als cd; so würde einer kleineren Seite ein größerer Winkel cde gegenüberstehen, was unserer vorigen Wahrheit widerspricht. Also muß ce größer, als cd seyn.

Hieraus folgt, daß im rechtwinkligen Dreyecke Fig. 29. die Hypotenuse da, und im stumpfwinkligen fde Fig. 31. die Seite fe die größte sey; daß ferner gleichen Winkeln gleiche Seiten gegen-

überliegen, folglich das gleichwinklige Dreyeck auch gleichseitig sey.

Zweytens von den Vierecken.

Eintheilung und Konstruktion der Vierecke.

§. 20. Folgende vierseitige Figuren wurden von den Geometern unterschieden, und mit eigenen Namen belegt:

1. Das Quadrat Fig. 37., eine Figur mit 4 gleichen Seiten und lauter rechten, also auch gleichen Winkeln, demnach, wie wir noch sehen werden, die einzige reguläre Figur unter den Vierecken. Grundseite und Höhe sind bey ihr gleich. Man konstruirt das Quadrat, wenn eine einzige Seite a, die man auch Wurzel nennt, gegeben ist, dadurch, daß man auf ihr oder auf ab im Endpunkte eine gleiche ac lothrecht errichtet, und dann aus c und b, als Mittelpunkten, mit einer der gegebenen Seite a gleichen Zirkelöffnung 2 sich in d schneidende Bogen, und dann aus d vollends dc und db zieht.

2. Das Rechteck oder Oblong Fig. 38. hat zwar auch lauter rechte Winkel, aber nur die entgegenstehenden Seiten de, fg und df, eg sind gleich. Man bildet diese Figur, wenn 2 gerade Linien a, b gegeben sind, indem man de als Grundseite gleich a, und das Loth df = b macht; dann aus f mit der Zirkelöffnung = a, und aus e mit der Zirkelöffnung = b Schneidbogen bey g, end-

lich gf, ge zieht. Bey dieser Figur ist immer eine Seite zugleich die Höhe.

Viele Körper haben Rechtecke zu Grenzen; z. B. die meisten 4eckigen Tische, die Bänke, Mauern, Fensterscheiben, u. d. gl. Aber der Spielwürfel, manche sogenannte Quadersteine haben Quadrate zu Grenzen.

Wenn man sich diese beyden Figuren aus ihren rechten Winkeln blos verschoben vorstellt, so, daß also zwar dieselbe Seitenlänge bleibt, aber jene rechte Winkel theils in spitze, theils in stumpfe verwandelt werden; so entstehen noch die 2 folgenden Vierecke:

3. Das verschobene Quadrat oder die Raute (der Rhombus) Fig. 39., eine Figur mit lauter gleichen Seiten, aber schiefen Winkeln, wo, wenn ab als Grundseite betrachtet wird, das Loth cd die Höhe ist.

Um eine bestimmte Raute zu konstruiren, muß eine Seite a und ein Winkel m gegeben seyn. Wenn man dann ab = a macht und an den Endpunkt a einen dem gegebenen Winkel m gleichen Winkel cab nach §. 15. 2) legt, den Schenkel ac gleich a macht, und dann weiter wie bey der Konstruktion des Quadrats verfährt; so hat man die Raute mit bestimmter Größe.

4. Das verschobene Rechteck oder die längliche Raute (die Rhomboide Fig. 40. ist eine vierseitige Figur, deren gegenüberstehende Seiten gleich, und deren Winkel schief sind. Wenn 2 Seiten z. B. a, b nebst einem Winkel m gegeben sind; so kann man diese Figur auf ähnliche Art,

wie vorhin die Raute und oben das Rechteck, konstruiren.

Eine jede dieser 4 Figuren führt auch den gemiensamen Namen eines Parallelogramms; darunter versteht man eine 4seitige Figur, deren gegenüberstehende Seiten parallel sind. Man sieht leicht ein, daß sowohl das Quadrat, als das Rechteck Parallelogramme seyen, indem alle Seiten senkrecht aufeinander sind, folglich die gegenüberstehenden gleichen Seiten gleichweit von einander abstehen, oder parallel seyn müssen. Gleichwie ferner die Schärfen der Liniale, welche wir oben am Parallellinial gesehen haben, immer einander parallel, oder gleichweit von einander abstehend durch die Querleistchen erhalten werden; eben so bleiben die gegenüberstehenden Seiten des Quadrats und des Rechtecks einander parallel, man mag diese Figuren verschieben, wie man will. Daher sind denn auch die 2 letzten Figuren wahre Parallelogramme.

Noch unterscheidet man hier das Trapez Fig. 41. oder diejenige 4seitige Figur, welche nur 2 gegenüberstehende Seiten parallel hat, nämlich cg und hi; das Loth cd, von einer Parallele auf die andere gezogen, ist die Höhe.

Die allerunregelmäßigste 4seitige Figur heißt Trapezoid Fig. 42, wo keine Seite mit der ihr gegenüberstehenden parallel ist.

Man pflegt übrigens die Vierecke nur mit 2 Buchstaben, welche an den einander gegenüberliegenden Ecken stehen, zu bezeichnen; so sagt man das Quadrat a ; das Rechteck ef. Die gerade Linie aber, welche diese einander entgegengesetzten

Ecken verbindet, heißt Diagonale, wie fe in Fig. 38., oder ih in Fig. 42.

Drittens von den regulären Vielecken.

A. Vorausgeschickte Wahrheiten vom Kreise.

§. 21. 1. Zu gleichen Bogen derselben Kreislinie gehören gleiche Sehnen, und umgekehrt. Denn man setze, daß in Fig. 43. die Bogen ahd und efb gleich seyen; so sind sie, wenn sie aufeinander gelegt gedacht werden, von einem und demselben Bogen nicht zu unterscheiden; in diesem Falle aber gelten auch ihre 2 Sehnen ad, eb nur für eine und dieselbe, sich selbst gleiche Sehne; demnach sind auch beyde Sehnen für die gleichen außerhalb einander liegenden Bogen gleich. Eben so sieht man auch ein, daß zu gleichen Sehnen gleiche Bogen gehören müssen.

2. Jede gerade Linie oC von der Mitte o einer Sehne ae zum Mittelpunkte des Kreises gezogen, ist senkrecht auf diese Sehne. Denn da wir ao gleich oe setzen, so hätten wir, um ein Loth in o zu errichten, nach §. 16. 3) nur noch mit derselben Zirkelöffnung, oder demselben Halbmesser aC den Durchschnittspunkt C zweyer Bogen suchen müssen. Dieser Punkt C ist aber hier schon durch den Mittelpunkt des Kreises gegeben.

Also geht jedes auf der Mitte einer Sehne errichtete Loth durch den Mittelpunkt; da also, wo

sich 2 solche errichtete Lothe wie oC, mC schneiden, ist der Mittelpunkt C eines Kreises.

Diese Wahrheit giebt uns ein Mittel an die Hand theils den nicht bekannten Mittelpunkt zu finden, theils einen Kreis, von dem nur ein Theil gegeben, oder noch vorhanden ist, vollständig zu machen, z. B. ein kreisrundes Bassin, wovon nur noch ein Bogen steht, zu ergänzen. Wenn man das auf irgend einer Sehne von der Mitte aus errichtete Loth bis nach i und g verlängert; so ist die Mitte dieser Linie ig der gesuchte Mittelpunkt; oder wenn man 2 Sehnen halbirt, und Lothe wie oC, mC errichtet; so wird z. B. Ce der Halbmesser, womit man, wenn blos der Bogen aeb gegeben wäre, den Kreis ergänzen kann.

3. Jedes Loth oder Perpendikel, vom Mittelpunkte des Kreises auf eine Sehne gefällt, geht durch die Mitte dieser Sehne, oder halbirt diese und ihren Bogen. Denn wir haben vorhin gesehen, daß ein in der Mitte o der Sehne ae errichtetes Loth durch C gehe. Nun ist von C nach o nur dieselbe gerade Linie möglich; wenn man also von C auf ae ein Loth herabfällt; so muß dieses auch durch die Mitte o gehen, und eben so den Bogen aie in i in 2 gleiche Theile theilen oder halbiren.

4. Man stelle sich vor, daß sehr viele kleine gleiche Sehnen, wie ak, kf Fig. 44. und so immer mehrere und kleinere Sehnen an die Kreislinie hingezogen seyen; so sieht man klar, daß diese Sehnen nur sehr wenig, oder das unendlich viele solcher Sehnen auch unendlich wenig von der Kreislinie ab-

stehen. Man kann daher die Summe aller dieser Sehnen für die Kreislinie selbst nehmen, oder die Peripherie des Kreises betrachten, als den Perimeter oder Umfang eines regulären Unendlichecks, und die Kreisfläche selbst als den Flächenraum eines solchen regulären Unendlichecks (oder eines Polygons von unendlich vielen gleichen Seiten und Winkeln).

B. Konstruktion der regulären Vielecke.

§. 22. 1. Man sagt überhaupt, eine Figur sey einem Kreise eingeschrieben, oder dieser um die Figur umhergeschrieben, wenn die Seiten der Figur Sehnen des Kreises sind; so ist in Fig. 43. adbe eingeschrieben. Aber die Figur heißt umschrieben, oder der Kreis eingeschrieben, wenn die Seiten der Figur Tangenten des Kreises sind; so ist auch adbe um den kleinen punktirten Kreis geschrieben; eben so sieht man in Fig. 44. eine sechsseitige Figur ein= und umgeschrieben.

Wollte man daher irgend ein reguläres Vieleck konstruiren; so dürfte man nur eine willkührlich gezogene Kreislinie in gleiche Bogen theilen, und deren Sehnen ziehen. Weil diese nach §. 20. 1) auch gleich sind; so würden sie die Seiten eines regulären Vielecks seyn. Allein diese Art, Flächenräume regulär zu begrenzen, ist etwas beschwerlich, weil man nicht so leicht die Kreislinie in eine gewisse Zahl gleicher Theile theilt, oder z. B. den 7ten, 8ten Theil

der Kreislinie findet, um ein reguläres Sieben- oder Achteck so fort einzuschreiben. Eine

2te, nicht minder beschwerliche Methode, diesen Zweck zu erreichen, beruht auf folgender Wahrheit:

Um die Summe aller inneren Winkel eines Vieleckes zu finden, multiplizire man 180° mit der Anzahl der Seiten der Figur, und ziehe von diesem Produkte wieder 360° ab. Denn wenn man sich von irgend einem, in der Fläche des Vieleckes angenommenen Punkte, wie in Fig. 44. vom Punkte C aus gerade Linie, wie Cb, Cd .... nach den Ecken der Figur gezogen denkt; so wird diese in soviele Dreyecke getheilt, als die Figur Seiten hat, in unserem Falle wird das Sechseck abcdefga in 6 Dreyecke getheilt. Die Summe also der Winkel dieser Dreyecke, weniger der Summe der um jenen Punkt C liegenden Winkel (als welche nicht zu den Polygonwinkeln gehören), macht die Summe der inneren Winkel des Vielecks aus. Nun machen die Winkel eines einzigen Dreyeckes 180° (§. 19. 2.), und die um C liegenden Winkel zusammen 360° §. 12.) aus. Da nun letztere Summe nicht zu den Polygonwinkeln gehöret; so muß sie von der Summe aller Dreyeckswinkel, oder von sovielmal 180° abgezogen werden, als Dreyecke oder Seiten des Vieleckes da sind. Im Sechsecke z. B. muß man 180° mit 6 multipliziren, und vom Produkte 1080° dann 360° abziehen, um 720° als die Summe aller inneren Winkel des Sechseckes zu haben.

Wenn daher die Figur regulär ist; so findet man einen Winkel des Vieleckes, wenn man die auf vorige Art erhaltene Summe der Winkel durch die Anzahl der Seiten oder Winkel des Vieleckes dividirt; so ist nach Fig. 44 ein Winkel des regulären Sechseckes gleich $\frac{720°}{6}$, oder gleich 20°.

Um nun ein reguläres Vieleck zu konstruiren, würde man an einer geraden Linie von willkührlicher oder gegebener Länge den auf die vorige Art berechneten Polygonwinkel mit Hilfe des Transporteurs verzeichnen, den Schenkel gleich machen der zuerst gezogenen Linie, und dann an den vorigen Schenkel denselben Winkel wieder konstruiren u. s. w., bis sich die Figur geschlossen hat. Statt dieser beschwerlichen Methoden wählt man lieber

3. eine der folgenden:

a. Um ein reguläres Viereck (oder das Quadrat zu konstruiren; setze man nach Fig. 43. 2 Durchmesser ab, cd senkrecht aufeinander, und verbinde deren Endpunkte mit geraden Linien ad, db . . ; so sind diese, als Sehnen gleicher Bogen (Quadranten), gleich, und alle Winkel sind rechte Winkel (§. 14.).

b. Nun ist auch das reguläre Achteck leicht zu konstruiren, indem man nur Halbmesser, wie Ci, Cf . . . senkrecht auf die Sehnen oder Seiten des Quadrats, und dann die Sehnen ai, ie, ef, fb . . . . zieht; welche Sehnen wieder gleich sind, weil die Bogen ae, eb . . . . halbirt wurden. Würde man abermals senkrechte Radien auf die Sehnen ai, ie . . . . fällen, und wie vorhin ver-

fahren; so erhielte man das reguläre Sechszehneck.

c. Soll man das reguläre Sechseck Fig. 44. bilden; so trage man nur den Halbmesser z. B. ba der gezogenen Kreislinie sechsmal in der Peripherie umher. Denn da das Dreyeck aCg nun gleichseitig, folglich der Winkel an C gleich 60° ist (§. 19. 5) und 31); so ist der Bogen aqg ebenfalls gleich 60°, oder, wie es seyn muß der sechste Theil der ganzen Kreislinie.

Würde man immer eine Ecke des Hexagos auslassen, und so die geraden Linien ad, df, fa ziehen; so wäre das reguläre Dreyeck eingeschrieben; und wenn man, wie vorhin, durch die senkrechten Halbmesser, wie Cq, die Bogen halbirte und von a nach q, von q nach g u. s. w. Sehnen zöge; so hätte man das reguläre Zwölfeck eingeschrieben.

d. Das reguläre Fünfeck wird so konstruirt: Man theile den Durchmesser ab Fig. 45. eines Kreises in 5 gleiche Theile; ziehe mit der dem Durchmesser ab gleichen Zirkelöffnung aus a und b Schneidbogen bey d und e. Von diesen Punkten ziehe man dann durch die geraden Theilpunkte 2, 4 bis an die Kreislinie die geraden Linien df, dg, ei, eh; so werden dann die Sehnen fa, ai, ih, hg, gf die Seiten des regulären Fünfeckes.

Würde man wieder alle diese Sehnen durch senkrechte Halbmesser halbiren, wie dieß ck thut, und dann, wie oben, die Sehnen ak, kf u. s. w. ziehen; so hätte man das reguläre Zehneck (Dekagon).

Wenn man ferner den Durchmesser ab in 7 gleiche Theile getheilt hätte, und auf die oben vorgeschriebene Art weiter verfahren wäre; so hätte man das reguläre Siebeneck erhalten.

4. Um ein reguläres Vieleck umzuschreiben, schreibe man ein solches in den Kreis, verlängere die Halbmesser Ca, Cn Fig. 44. und ziehe parallel mit der Seite ag zwischen diesen Halbmessern gerade Linien, wie mqn, np u. s. w.; so bilden diese die Seiten des umzuschreibenden Vielecks, indem mn, np . . . lauter Tangenten sind.

Anmerkung. Diese Konstruktionen sind öfters dem Künstler und Handwerker von Wichtigkeit. Wenn z. B. verlangt wird, man solle ein Blatt Papier, oder ein Brettchen u. d. gl. genau regulär sieben- oder achteckig schneiden; so wird man einen möglichst großen Kreis umherziehen, dann auf eine der obigen Weisen die gewünschte reguläre Figur einschreiben, und nach ihren Seiten die Materie durchschneiden oder sägen. Um weniger an der Materie z. B. von dem Brette zu verlieren, dürfte man nur dieselbe reguläre Figur umschreiben.

IV. Von den Eigenschaften der ebenen geradlinigen Figuren, in wiefern sie miteinander verglichen werden.

§. 23. Wenn man 2 Figuren miteinander vergleicht; so will man entweder wissen, 1) ob sie in=

nerhalb ihrer Grenzen gleich große Flächenräume enthalten; oder 2) ob die Theile in der einen Figur gerade so zum Ganzen verbunden und vereinigt seyen, wie in der andern Figur; oder 3) ob 2 Figuren nicht nur einerley Größe ihrer Flächenräume haben, sondern ob auch zugleich die Art der Vereinigung der Theile dieser gleichen Flächenräume in beyden Figuren dieselbe sey; oder man will 4) wissen, wie sich die Flächenräume der Figuren zueinander verhalten.

a. Figuren nun, deren Flächenräume wir durch dieses Vergleichen als einerley (oder gleich), oder als verschieden erkennen, nennt man kurz gleiche oder ungleiche Figuren. So nennen wir ein Stück Feld dem anderen gleich, sobald wir gefunden haben, daß eines wie das andere z. B. 2 Morgen sey. Hiebey wird auf die Art der Begrenzung beyder Figuren keine Rücksicht genommen; das eine Stück Feld kann z. B. dreyeckig, das andere ein Viereck seyn.

b. Wenn wir aber lediglich auf die Art der Begrenzung, auf die Form der Figuren, oder auf die Art der Verbindung ihrer Theile zum Ganzen bey dem Vergleichen Rücksicht nehmen; so nennen wir sie entweder ähnlich oder unähnlich. So sagen wir, daß alle Kreisfiguren, groß oder klein, einander ähnlich, aber ein dreyeckiges und viereckiges Stück Feld einander unähnlich seyen; eben so finden wir die Raute unähnlich der länglichen Raute oder der Rhomboide.

c. Figuren, welche nebst den gleichen Flächenräumen auch einerley oder gleiche Art von Begren-

zung haben, so, zwar, daß wenn man sie aufeinander legte, ihre Grenzen zusammenfallen, oder die Figuren sich decken würden, heißen kongruente, oder gleiche und ähnliche Figuren.

d. In Hinsicht ungleicher sowohl als ähnlicher Figuren fragt sich blos, wie man das Verhältniß theils ihrer Umfänge, theils ihrer Flächenräume zueinander bestimmen, oder finden könne, oder um wieviel der eine Umfang, oder der eine Flächenraum größer, als der andere sey?

Da man von der erkannten Kongruenz der Figuren sowohl auf ihre Gleichheit, als Aehnlichkeit schließen kann; so wollen wir vor Allem sehen, unter welchen Bedingungen besonders die Dreyecke kongruent seyen; denn mehr- oder überhaupt vielseitige Figuren lassen sich in lauter Dreyecke getheilt denken.

A. Von der Kongruenz der Dreyecke.

§. 24. Man erkennt die Kongruenz der Dreyecke schon an folgenden 3 Vergleichungsstücken:

1. Wenn 2 Dreyecke abc, def Fig. 46. einen Winkel gleich haben, c = f, und wenn die diesen Winkel umschließenden Seiten wechselweise gleich sind, d. i. wenn ac = df und bc = ef ist; so sind beyde Dreyecke kongruent.

Denn wenn man sich das Dreyeck def so über das andere abc gelegt vorstellt, daß der Scheitelpunkt f auf c und der Schenkel fd über ca hinfällt; so wird wegen der gleichen Neigung der

Seite ac zu bc, und der Seite df zu ef auch der andere Schenkel fe über cb hinfallen. Da nun ac so lang seyn soll, als df; so wird auch der Endpunkt d mit dem Endpunkte a, und aus demselben Grunde auch der Punkt e mit b zusammenfallen. Diese 4 Punkte sind aber die Endpunkte der Seiten ab, de, also decken sich auch diese Seiten, folglich decken sich die ganzen Dreyecke, oder diese sind kongruent.

Es folgt, daß auch der Winkel a = d, und b = e seyn müsse, oder daß die Winkel, welche den wechselweise gleichen Seiten entgegen stehen, gleich seyen.

2. Wenn 2 Dreyecke eine Seite ab = de haben, und 2 Winkel wechselweise, demnach auch die 3 Winkel wechselweise gleich haben, so sind sie gleich und ähnlich zugleich.

Denn was die Winkel betrifft, so sey z. B. a = d, c = f; so erkenne ich daraus, daß auch der dritte Winkel b = dem dritten e sey. Denn derselbe Rest von Graden, welcher für den Winkel b bleibt, wenn man die Summe der Winkel a und c von 180° (nach § 19 2.) abzieht, bleibt nothwendig auch, wenn man die der vorigen Summe gleiche Summe der Winkel d und f von 180° abzieht, für den dritten Winkel e übrig.

Wenn man nun wieder das Dreyeck def so über das andere abc sich gelegt vorstellt, daß die gleich lange Seite de auf ab fallt; so sieht man, daß auch die übrigen Seiten aufeinander fallen müssen, weil sie gleiche Neigungen zueinander ha-

ben. Da sich demnach die ganzen Figuren decken; so sind auch die gleichen Winkeln gegenüberliegenden Seiten wechselweise gleich, nämlich ac = df, und bc = ef.

Hieraus sieht man ein, daß die Diagonale jedes Parallelogramm in 2 kongruente Dreyecke theile, z. B. in Fig. 38. die Diagonale fe; indem nämlich fe beyden Dreyecken fge, fed gemeinschaftlich ist, und fe sowohl die Parallelen fg, ed, als die anderen fd, ge schneidet, daher nicht nur m = n, sondern auch r = s macht (§. 13.). Hieraus folgt, daß die parallelen Seiten auch gleich seyen.

3. Endlich fallen auch die Grenzen zweyer Dreyecke zusammen, wenn sie wechselweise alle Seiten gleich haben, d. i. wenn ab = de, ac = df, bc = ef ist. Denn diese 3 wechselweise gleiche Seiten schließen auch nothwendig wechselweise gleiche Winkel a = d, c = f, b = e ein; man stelle sich nämlich beyde Dreyecke an irgend einer gleichen Seite ab = de, übereinandergelegt vor; so sage ich, wird die der Seite ac gleiche Seite df sich auch mit ac decken, oder der Winkel d = a seyn müssen. Denn fiele z. B. df nach ag; so würde gb die dritte Seite fe vorstellen, folglich würde gb = cb seyn müssen. Allein gb ist offenbar größer, als cb, indem im Dreyecke cgb der Winkel gcb größer, als bgc ist; denn schon der Theil acg jenes Winkels ist im gleichschenkligen Dreyecke gca nach §. 19. 4) gleich dem ganzen Winkel agc. Demnach wäre nothwendig die dem weit kleineren Winkel bgc entgegenliegende Seite cb kleiner, als gb (§. 19. 5.), was wider die Voraussetzung ist.

Eben so wenig kann df rechts der Seite ac fallen. Also fallen alle 3 Seiten aufeinander, und auch alle Winkel sind in solchen Dreyecken wechselweise gleich.

Man sieht, welche Bedingungen man erfüllen müsse, wenn etwa verlangt wird, ein Dreyeck def zu konstruiren, das mit einem vorgegebenen abc kongruent sey. Man würde z. B. eine Seite ab und 2 Winkel a und b messen; dann de = ab machen, und an d und c 2 Winkel legen, welche jenen gemessenen gleich sind; so hätte man nach Zusammenziehung der Schenkel df, ef die unter 2) genannten Bedingungen erfüllt, folglich wäre nun def gleich und ähnlich dem Dreyecke abc.

Anmerkung. Eine schöne Anwendung obiger Wahrheiten ist diese: Wenn in Fig. 47. die punktirte Linie den Abstand zweyer Orte A und B auf dem Felde vorstellt, und verlangt wird, man solle die Größe dieses Abstandes, ungeachtet des Hindernisses H z. B. eines Sumpfplatzes, finden; so wählt man sich auf dem Felde einen Punkt C, wovon man nach A und B hinmessen kann, trägt die gemessene Länge CA in gerader Richtung auf dem Felde von C bis E, und eben so die Länge CB von C bis D zurücke: so ist dann die zwischen den Stäben D und E zu messende gerade Linie eben so groß, als jener Abstand AB. Denn da die Scheitelwinkel bey C gleich sind (§. 11.), welche aber auch von gleichen Seiten AC = CE, BC = CD umschlossen werden; so sind nach 1) die Dreyecke kongruent, folglich auch DE = AB.

Läge der Ort B z. B mitten in einem See oder Flusse, so, daß man schlechterdings nicht hinzukom-

men könnte; so würde man CA messen, und bey A das Winkelinstrument einstellen, nach B und nach den Stab in C visiren, um so die Größe des Winkels BAC zu erhalten. Dann trüge man, wie vorhin, CA nach E zurücke, und visirte bey E einen Winkel CED ab von der Größe, wie der vorige BAC; würde man nun in der Richtung des Schenkels ED einen Stab einstellen lassen, welcher in derselben geraden Linie mit dem Stabe C und dem Orte B stände; so würde die gemessene DE wieder den gesuchten Abstand angeben, indem nach der Wahrheit unter 2) die Dreyecke ABC, CDE wieder kongruiren.

B. Von der Gleichheit der Figuren.

§. 25. Erstens. Zwey Parallelogramme z. B. ad, eh Figg. 48. 49. sind gleich, oder haben gleich große Flächenräume, wenn ihre Grundseiten ab, ef und ihre Höhen ca, hi gleich sind. Denn je 2 solche Parallelogramme kann man sich immer so verbunden vorstellen, daß sie die gleichen Grundseiten gemein haben, und wegen der gleichen Höhen innerhalb derselben Parallelen zu liegen kommen; so ist es offenbar eins und dasselbe, ob das Parallelogramm eh außerhalb dem anderen ad, oder mit diesem, wie das Parallelogramm an, verbunden ist. Nun ist aber ad = an; weil in den Dreyecken cam und dbn die parallelen Seiten ca, bd, eben so am, bn (nach §. 24 unter 2.) gleich sind; ferner ist eben so cd = ab, und auch mn = ab; also beyde Seiten

cd, mn derselben Linie ab, daher auch sich selbst gleich. Wenn man nun zu cd sowohl, als zu mn dasselbe Stückchen dm hinzu thut, so sieht man, daß auch die dritten Seiten cm, dn unserer Dreyecke gleich, diese daher wechselweise gleichseitig, also nach §. 24. unter 3 kongruent seyen.

Man denke sich nun aus beyden Dreyecken das Stückchen Fläche dom weggenommen, so bleiben gleiche Trapeze caod, mobn übrig; zu diesen gleichen Räumen denselben Raum aob hinzugefügt, erhält man die gleichen Räume cdba, mnba oder die gleichen Parallelogramme ad, an. Demnach sind auch die außerhalbeinander liegenden Parallelogramme ad, eh gleich. Auf eine ähnliche Art kann man immer beweisen, daß 2 Parallelogramme mit gleichen Grundseiten und Höhen, wie sie auch aussehen mögen, gleiche Flächenräume haben, indem man sie auf obige Art miteinander verbunden, jedesmal als gleich erkennt.

Zweytens sind daher auch alle Dreyecke, sobald sie gleiche Grundseiten und gleiche Höhen haben, oder zwischen denselben Parallelen liegen, einander gleich. Denn das Dreyeck acb ist die Hälfte des Parallelogramms ad, und das Dreyeck egf, dessen Höhe ist gk oder hi (welche = ac), ist die Hälfte des Parallelogramms eh; da aber diese ganzen Figuren gleich sind; so sind auch ihre Hälften, oder jene Dreyecke unter denselben Bedingungen gleich. Wenn z. B. sowohl ad, als eh einen Morgen Felds vorstellte; so würden die Seiten des Dreyecks acb eben so gut einen halben Morgen Feldes einschließen, als die

ganz anders zusammenstoßenden Seiten des Dreyecks egf.

Aus den vorgetragenen Wahrheiten folgen 2 andere: 1. diese, daß man aus der Größe des Umfanges oder der Summe der Seiten einer Figur nicht mit Gewißheit auf die Größe ihres Flächenraumes schließen könne. Würde man die 4 Seiten des Parallelogramms ch messen, eben so die des Parallelogramms ab; so würde die Summe jener Seiten sicher eine größere Zahl geben, als die Summe dieser Seiten von ad, und doch sind beyde Flächenräume von gleicher Größe. Eben darum kann man auch nicht daraus, daß man mehr Zeit braucht, um ein Stück Feld (oder eine Stadt) ganz zu umgehen, als bis man um ein anderes Stück Feld umherkömmt, sogleich schließen, daß das erstere größer sey, als das letztere, vorausgesetzt, daß sie nicht eine völlig gleiche Gestalt haben.

2. Man kann auch sagen, daß jedes Dreyeck z. B. abc Fig. 48. die Hälfte eines Parallelogramms an sey, welches mit ihm dieselbe Grundseite ab hat, und zwischen denselben Parallelen ab, cn liegt, indem man sich immer ein anderes Parallelogramm ad gebildet denken kann, wovon das Dreyeck abc die Hälfte ist, so, daß es auch als die Hälfte des Parallelogramms an erkannt wird, weil an = ad ist.

Drittens ist folgende Wahrheit sehr merkwürdig: Wenn man über alle Seiten eines rechtwinkligen Dreyecks acb Fig. 50. nach

§. 20. Quadrate konstruirt; so ist der Flächenraum des über die Hypotenuse ab konstruirten Quadrats ae so groß, als die Flächenräume der zwey über die Katheten ac, cb konstruirten Quadrate P, Q zusammengenommen. Diese Wahrheit leuchtet auf diese Weise ein: Die mit ad parallel aus dem rechten Winkel c gezogene gerade Linie cog theilt das Quadrat bd in 2 Parallelogramme od und oe. Wenn nun oe gleich Q und od gleich P ist; so ist offenbar oe + od oder ae = Q + P. Um nun zu beweisen, daß oe gleich Q sey, ziehe man die geraden Linien ce, af; dadurch entstehen 2 kongruente Dreyecke abf, cbe, weil 1) wenn man zu jedem der rechten Winkel m und n denselben Winkel i hinzuthut, der Winkel i + m oder cbe gleich wird dem Winkel i + n oder abf im andern Dreyecke; 2) aber diese Winkel werden auch von wechselweise gleichen Seiten cb = bf, bc = ba umschlossen, also sind nach §. 24. 1) die genannten Dreyecke kongruent. Nun ist aber das Dreyeck cbe die Hälfte von dem Parallelogramm oe, indem beyde Figuren dieselbe Grundlinie be haben, und zwischen denselben Parallelen be und cog liegen; eben so ist das Dreyeck abf die Hälfte des Quadrats Q. Demnach ist jenes Parallelogramm diesem Quadrate gleich, weil die Dreyecke, als ihre Hälften, gleich sind. Da nun auf ganz gleiche Weise dargethan werden kann, daß auch das Parallelogramm od gleich sey dem Quadrate P; so ist das ganze Quadrat ae wirklich gleich der Summe P + Q, wie der obige Satz aussprach.

Von der Verwandlung der Figuren ineinander.

§. 26. Auf die Wahrheit der vorigen Sätze stützt sich die Verwandlung mancher Figuren in andere von gleichem Flächenraume.

1. Ein schiefwinkliges Parallelogramm abcd Fig. 51. wird in ein gleiches rechtwinkliges dadurch verwandelt, daß man in a das Loth ae errichtet, und mit ae durch b die Parallele bf zieht, welche von der verlängerten cd in f begrenzt wird.

2. Ein Parallelogramm gh Fig. 52. wird in ein gleiches Dreyeck gkl verwandelt, indem man die Verlängerung il gleich gi macht, und dann kl zieht; und umgekehrt würde man das gegebene Dreyeck gkl in das gleiche Parallelogramm gh verwandeln, indem man die Seite gl in i halbirte, und durch i mit der Seite gk die Linie ih parallel zöge, welche dann von der mit gl parallelen Linie kh in h begrenzt würde.

3. Wollte man mehrere Dreyecke a, b, c Fig. 53. welche gleiche Höhe dh haben, in ein einziges ihnen allen zusammengenommenen gleiches Dreyeck T verwandeln; so dürfte man nur eine gerade Linie AB ziehen, auf ihr die Grundseiten jener Dreyecke auftragen, und im Endpunkte A das Loth AC so groß errichten, als eine Höhe dh jener Dreyecke ist; so würde T den Flächenraum aller jener gegebenen gleich hohen Dreyecke in sich vereinigen. Eben dieß gilt in Beziehung auf Parallelogramme; nämlich das Parallelogramm AD ist gleich den 3 Parallelogrammen dg, df, dl.

4. Soll daher irgend ein reguläres Polygon z. B. das Sechseck Fig. 44 in ein jenem Flächenraume gleiches Dreyeck ABC Fig 54 verwandelt werden; so darf man nur die Seite ab jenes Vieleckes 6mal auf einer geraden Linie AB auftragen, AC gleich machen der Höhe Co eines der kongruenten Dreyecke jenes Polygons, und CB ziehen; so ist das Dreyeck ABC gleich dem regulären Sechsecke. Auf gleiche Weise ist jedes reguläre Vieleck einem Dreyecke gleich, dessen Grundseite gleicht dem Umfange des Vieleckes, und dessen Höhe ist gleich dem Abstande der Mitte des Vieleckes von einer seiner Seiten.

5. Es ist also auch die Kreisfläche selbst einem Dreyecke gleich, welches die Peripherie zur Grundseite hat, indem man sich jene in eine gerade Linie ausgedehnt vorstellt und dessen Höhe ist der Halbmesser des Kreises. Denn auch dieser ist ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten (§ 21. 4).

6. Wenn man z. B. die 3 Quadrate Fig. 50. ae, P und Q in ein einziges ihnen allen gleiches Quadrat verwandeln sollte; so setzte man 2 unbestimmt lange gerade Linien ab, ac Fig. 55. aufeinander senkrecht, trüge auf der einen die Seite am des Quadrates ae und auf der anderen die Seite bf des Quadrats Q von a bis n auf, zöge die Hypotenuse mn; so wäre das auf ihr errichtete Quadrat gleich ac + Q, Wenn man daher noch mn auf ac bis o, und die Seite ay des Qua-

drats P auf ab von a bis p trüge, und po zöge; so wäre das auf po errichtete Quadrat gleich ae + Q + P.

C. Von der Aehnlichkeit der Figuren.

§. 27. Um zu erkennen, ob ebene geradlinige Figuren einerley Art der Verbindung ihrer Theile zum Ganzen haben, oder ob bey ihnen einerley Begrenzungsweise statt finde, muß man ihre Seiten sowohl, als ihre Winkel wechselweise vergleichen. Wenn nun alle Winkel von 2 solchen Figuren wechselweise nach der Ordnung gleich, und alle gleichliegenden Seiten proportional sind; so sind die Figuren ähnlich. So sind alle reguläre Figuren von gleich viel Seiten ähnlich, z. B. das größere und kleinere reguläre Sechseck in Fig. 44. denn nach §. 22. 2) ist für jedes dieser Polygone jeder Winkel = 120°, demnach sind alle Winkel wechselweise gleich; da ferner auch alle Seiten jeder Figur gleich sind; so verhält sich auch mn : ad = np : df u. s. w. d. i. wievielmal kleiner die Seite ad als mn ist, ebensovielmal kleiner ist auch df, als np, was denn wechselweise von allen Seiten gilt. Es sind daher auch alle Kreise ähnliche Figuren.

Die Aehnlichkeit der Dreyecke z. B. von abc Fig. 56. und def erkennt man schon daran, wenn sie 1) 2 Winkel wechselweise gleich haben, z. B. e = f und a = d (wo folglich auch b = e ist); — 2) wenn alle gleichliegenden Seiten proportional sind. Dieß will sagen: wenn man durch Messung

gefunden hätte, daß die Seite ac z. B. dreymal größer, als die Seite df wäre; so müßte auch ab das 3fache von de, und bc eben so das dreyfache von ef seyn, d. i. jede zwey dieser Seiten müßten sich zueinander verhalten, wie 3 zu 1, oder alle gleichliegenden Seiten proportional seyn, wenn die Dreyecke ähnlich seyn sollen. — 3 Auch erkennt man sie schon als ähnlich, wenn ein Winkel c ≐ f ist, und die umschließenden Seiten miteinander in Proportion stehen, oder wenn sich ac zu df verhält, wie bc zu ef.

Von der Konstruktion ähnlicher Figuren und vom verjüngten Maßstabe.

§ 28 1 Die Aufgabe, eine ähnliche Figur zu konstruiren, wird in der Anwendung auch überhaupt so ausgedrückt: man soll einen Riß, oder eine Zeichnung fertigen, oder für unseren Fall: man soll eine Figur z. B. von einem gemessenen Stück Feld in Grund legen, oder zu Papier bringen.

Die Lösung dieser Aufgabe fodert, daß man aus der kleinen Zeichnung auf dem Papiere die richtige Gestalt und Größe der Figur mit allen Seiten und Winkeln, so wie sie in der Natur, oder im Großen wirklich statt finden, erkennen und beurtheilen könne. Beyde Figuren dürfen daher nicht blos ähnlich scheinen, wie etwa 2 rechtwinklige Dreyecke dem Augenmaß nach ähnlich sind; sondern sie müssen genau in dem Sinne ähnlich seyn, wie wir im vorigen §. erklärt haben. Soll z. B. in Fig. 56.

das Dreyeck def genau ähnlich seyn dem großen Dreyecke abc; so muß die Seite df genau soviele kleine gleiche Theile enthalten, als von einem größeren Maße Theile auf ac gehen; allein auch die Seite de muß jener kleinen Theile soviele enthalten, als wieviele Theile aus demselben größeren Maße auf ab gehen u. s. w. Denn nur in diesem Falle sind alle gleichliegenden Seiten dieser Dreyecke proportional, und alle Winkel wechselweise gleich.

2. Um also ähnliche Figuren zu konstruiren, Risse oder Pläne zu machen, muß man wissen, wie man verjüngte Maßstäbe fertige. Jeden Maßstab nämlich, auf welchem wir kleine gleiche Theile machen, welche wir denn andere größere Maße, womit wir gerade Linien oder Längen in der Natur ausmessen, nach Willkühr bedeuten lassen, heißt ein verjüngter oder künstlicher Maßstab. Solche verjüngte Maßstäbe sind durch die Figg. 57. 58. 59. 60 dargestellt; die 3 ersten nach der 12theiligen, der letzte nach der 10theiligen Eintheilung. Auf dem Maßstabe Fig. 57. kann man einen Theil, wie 6. 12 eine halbe Ruthe, folglich Theile, wie 1. 2. einen Fuß bezeichnen lassen. Wenn man aber gar keine Ruthenbezeichnung nothwendig hätte, indem eine vorgegebene Ebene blos mit dem Fuß- und Zollmaße ausgemessen worden wäre; so würde man Theile wie 6. 12 einen halben Schuh, daher Theile, wie 1. 2. Zolle bedeuten lassen. Dasselbe ist der Fall bey Fig. 58., nur daß hier die Ruthe oder der Fuß in 12 gleiche Theile getheilt erscheint.

Die genaue Theilung bey beyden verjüngten Maßstäben verrichtet man am sichersten nach §. 10. 1). Viel leichter ist die Theilung für den Maßstab, wie ihn Fig. 59. vorstellt. Alle Linien werden nämlich parallel, und zwar so gezogen, daß BC entweder ein Quadrat oder ein Rechteck vorstellt; ein Theil AC der geraden Linie A 60 wird halbirt, AB aber in 6 gleiche Theile getheilt, und durch die Theilpunkte a, b, c ... werden Parallellinien, so wie von jenem Halbirungspunkte 6 die geraden Linien 6 B, 6 D gezogen. Wenn man nun Theile, wie BD, z. B. 1 Ruthe bedeuten läßt; so bedeutet 1 k einen Schuh, 2 i zwey Schuh u. s. w. 7 f aber bedeutet 7 Schuh, 9 h 9 Schuh u. s. w. Gesetzt nun man sollte mit dem Handzirkel eine Länge fassen, welche im Großen 3 Ruthen und 8 Fuß bedeutete; so müßte man die eine Zirkelspitze auf der dritten Parallele in x einstellen, und den Zirkel bis zu den Punkt 8 öffnen. Ließe man einen Theil AC oder BD einen Fuß bedeuten; so wäre ein Theil 1 k = 11 a ein Zoll u. s. w.

Fig. 60 stellt einen sogenannten 1000theiligen verjüngten Maßstab vor; auf diesem kann man nämlich, wenn man einen größten Theil 10 b eine Ruthe bedeuten läßt, nicht nur Füße wie 10 a, sondern auch Zolle nehmen; so bedeutet 5 i 5 Zolle. Weil nämlich der Zoll der 10te Theil eines Fußes, also der 100ste Theil von 10 b oder einer Ruthe ist; so ist der Zoll oder a der 1000ste Theil von 10 c; daher wird dieser Maßstab mit Recht ein 1000theiliger genannt. Die Figur zeigt übrigens deutlich, wie man einen solchen verjüngten Maßstab auf dem Papiere, oder einem Blättchen Messing oder Elfen-

bein verzeichnen könne. Würde man eine Länge von 2 Ruthen 5 Fuß 5 Zoll auf diesem Maßstabe fassen sollen, so würde man die eine Zirkelspitze in y und die andere in x einsetzen müssen.

Man setze nun, man sollte mit Hilfe eines dieser verjüngten Maßstäbe eine ähnliche Figur, z. B. das Dreyeck d e f Fig. 56 dem Dreyecke a b c ähnlich bilden oder konstruiren; so würde man, vorausgesetzt, daß man alle Seiten dieses Dreyeckes im Großen ausgemessen, demnach ab = 8° d. i 8 Ruthen lang gefunden hätte, auf einem jener Maßstäbe auch 8 gleiche Theile mit dem Zirkel fassen, und diese auf einer geraden Linie von d bis e auftragen. Eben so faßte man 10 jener gleicher Theile mit dem Zirkel und beschriebe aus c mit dieser Zirkelöffnung einen Bogen; endlich faßte man 11 jener gleichen Theile auf dem Maßstabe und zöge aus d den zweyten Kreisbogen, dann von f die geraden Linien fd, fe; so wäre nun das kleine Dreyeck ähnlich dem gegebenen a b c.

Wenn eine Figur vierseitig oder überhaupt vielseitig ist; so werden entweder alle Seiten und Winkel unmittelbar in der Natur ausgemessen, oder die Figur wird durch lauter Diagonalen in Dreyecke vertheilt, von denen man die einzelnen Seiten mißt und sich diese Maße anmerkt. Im ersten Falle bildet man mit Hilfe des Transporteurs auf dem Papiere oder im kleinen die gemessenen Winkel, so wie mit Hilfe des verjüngten Maßstabes jede Seite nach; im anderen Falle sucht man, wie vorhin, die ähnlichen Dreyecke einzeln nachzubilden, um eine ähnliche Figur zu erhalten.

D. Von dem Verhältniße der Flächenräume und Umfänge der Figuren zueinander.

§. 29. 1. Die Flächenräume zweyer Dreyecke, welche dieselbe Höhe haben, verhalten sich zueinander, wie ihre Grundseiten. Denn man stelle sich die gerade Linie ae Fig 61. in willkührlich viele z. B. in 3 gleiche Theile getheilt vor, errichte das Loth ac und ziehe die geraden Linien cb, cd, ce zu jenen Theilpunkten; so sind diese nun entstehenden Dreyecke acb, bcd, dce wegen der gleichen Höhe und der gleichen Grundlinien gleich (§. 25. zweytens.) Demnach enthält das Dreyeck acd zwey gleiche Dreyecke, oder es ist noch einmal so groß, als eines dieser Dreyecke z. B. acb; aber auch jenes Grundseite ad ist noch einmal so groß, als ab; man kann daher sagen: es verhält sich das Dreyeck acd : acb = 2 : 1, aber auch ad : ab = 2 : 1; also acd : acb = ad : ab, d. i. jene Flächenräume verhalten sich, wie die Grundseiten ad, ab. Eben so hat das Dreyeck ace mit einer 3mal größeren Grundseite, als ab, auch einen 3mal größeren Flächenraum, als das Dreyeck acb.

2. Eben diese Wahrheit gilt auch in Ansehung solcher Dreyecke, die außerhalb einander liegen, aber gleiche Höhen haben.

3. Auch die Flächenräume von je 2 Parallelogrammen, welche gleiche Höhen haben, verhalten sich, wie ihre Grundlinien Denn man kann jedes Dreyeck z. B. acb Fig. 62. als die Hälfte eines Parallelogramms von derselben Höhe und mit dersel-

den Grundlinie ab betrachten. Wie sich aber die Hälften verhalten, so verhalten sich auch die Ganzen. Wäre z. B die Grundlinie des einen Parallelogramms 6 Ruthen lang, und die Grundseite eines andern von gleicher Höhe wäre nur gleich 2°; so würde sich das kleinere zum größeren verhalten, wie 2 zu 6, oder wie 1 zu 3; d. i. der Flächenraum des letzteren wäre dreymal größer, als der des ersteren Parallelogramms.

4. Allein in Fig. 61. kann man auch ac als die Grundseite und ab, ad als die Höhen der Dreyecke acb, acd betrachten, so, daß sich also Dreyecke mit einerley Grundseite verhalten, wie die Höhen. Eben diese Wahrheit gilt nicht nur von außerhalbeinander liegenden Dreyecken, sondern auch von den ganzen Parallelogrammen, welche gleiche Grundseiten, aber ungleiche Höhen haben. In diesem Falle also dürfte man nur diese ungleichen Höhen messen, um bestimmt sagen zu können, um wieviel der Flächenraum der einen Figur größer, als der der anderen sey.

5. Wenn daher je 2 Dreyecke oder Parallelogramme sowohl ungleiche Grundseiten, als ungleiche Höhen haben; so muß man obige Verhältniße der Höhen und der Grundseiten zusammensetzen, oder die Zahlen, welche in einer wie in der anderen dieser Figuren die Größe der gemessenen Höhen und Grundseiten anzeigen, miteinander multipliziren, und dann sehen, um wievielmal das eine Zahlenprodukt größer sey, als das andere. Z. B. die Grundlinie des einen Parallelogramms sey = 6°, dessen Höhe = 4°; die Grundlinie des kleine-

ren Parallelogramms sey = 3°, die Höhe = 2°; so verhält sich das größere Parallelogramm zum kleineren, wie 6×4 zu 3×2, oder wie 24 zu 6, oder wie 4 zu 1; das will sagen: des kleineren Parallelogramms Flächenraum ist 4mal kleiner, als der des größeren.

Fortsetzung.

§. 30 6. Wenn 2 Dreyecke ähnlich sind, wie abc und def Fig. 56.; so bilden ihre Höhen cg, fh selbst wieder mit den Seiten ac, df und den Theilen ag, dh ähnliche Dreyecke acg, dfh, indem die rechten Winkel bey g und h, eben so a und d gleich, also die ganzen Dreyecke wechselweise gleichwinklig sind (§. 27.) Demnach stehen die Höhen cg, fh selbst im Verhältniße zu den gleichliegenden Seiten dieser Dreyecke, z. B. zu den Grundseiten ab, de, so, daß, wenn z. B. ab 3mal größer als de ist, auch die Höhe cg 3mal größer als fh seyn muß. Demnach sind die Zahlen für das Verhältniß der Höhen dieselben, wie für das Verhältniß der Grundseiten. Indem man also nach §. 29. 5) beyde Zahlen miteinander multiplizirt, erhält man Quadratzahlen, deren Verhältniß zueinander das Verhältniß der Flächenräume der ähnlichen Dreyecke zeigt. Dieses drückt man so aus: die Flächenräume ähnlicher Dreyecke verhalten sich wie die Quadrate ihrer Grundseiten oder je zweyer gleichliegenden Seiten. Gesetzt man habe 2 solche Seiten gemessen, und z. B. cb = 9′ und fe = 3′ gefunden; so ver-

hielte sich das große Dreyeck zum kleinen, wie das Quadrat 91 zum Quadrate 9, oder wie 9 zu 1, d. i. jenes Dreyeck wäre 9mal größer, als dieses. — Hieraus folgt:

a) daß die Flächenräume je zweyer Quadrate z. B. ad, rq Fig. 37., weil auch diese reguläre, folglich ähnliche Figuren sind, sich verhalten, wie die Quadrate derjenigen Zahlen, welche die Größe ihrer Wurzelseiten z. B von ab und rs angeben;

b) daß sich ebenfalls die Flächenräume sowohl zweyer regulären Vielecke von gleich viel Seiten, als zweyer ähnlichen Vielecke verhalten, wie die Quadrate je zweyer gleichliegenden Seiten. Denn jene, wie diese Polygone (wobey man z. B. die regulären Sechsecke in Fig 44 und die ähnlichen Fünfecke in Fig 63. vergleiche) lassen sich entweder von den Mittelpunkten der Figuren oder von gleichliegenden Ecken aus durch gerade Linien in ähnliche Dreyecke theilen, so, daß sich demnach diese ganzen Figuren verhalten müssen, wie die ähnlichen Dreyecke selbst. So verhält sich der Flächenraum des großen Fünfeckes Fig 63 zum Flächenraume des kleineren, wie das Quadrat von BC zum Quadrat von bc; oder, wenn beyde Seiten gemessen sind, wie die Quadrate der diese Maße angebenden Zahlen. Man setze z. B., das kleine Fünfeck sey ein von der großen Figur entworfener Plan oder Riß, wozu der Maßstab RS Fig. 59. gedient habe. Nehmen wir ferner an, daß wir a 11 oder 1 k einen Fuß hätten bedeuten lassen, und 1 k 100mal kleiner, als ein natürlicher Fuß, womit wir messen, sey; so würde der Plan oder der Flächenraum

des Risses um das Quadrat von 100, nämlich um 10000mal kleiner seyn, als die Figur in der Natur.

c) Auch die Kreise, sagten wir oben, seyen reguläre Vielecke von unendlich vielen Seiten; also müssen sich auch ihre Flächenräume zueinander verhalten, wie die Quadrate der gleichliegenden Seiten. Oder, da sich diese, wie die Halbmesser, oder auch wie die doppelten Halbmesser, d. i. wie die Durchmesser verhalten; so verhalten sich auch die Kreisflächen, wie die Quadrate ihrer Halbmesser, oder Durchmesser; so ist eine Kreisfläche, deren Durchmesser z. B. 4mal größer ist, als der einer anderen Kreisfläche, 16mal größer, als letztere.

Anmerkung. Mit dem Verhältniße der Flächenräume der Figuren darf man keineswegs das Verhältniß ihrer Umfänge verwechseln. Denn diese verhalten sich bey ähnlichen Figuren einfach, wie die gleichliegenden Seiten. Wäre z. B. die Seite ab des Quadrats ad in Fig. 37. = 8′, die Seite rs des kleinen Quadrats = 4′; so verhielte sich die Summe aller Seiten des großen Quadrats, oder dessen Umfang zum Umfang des kleinen Quadrats einfach, wie 8 zu 4, oder wie 2 zu 1, d. i. nicht, wie die Quadrate dieser Seiten, ober wie 4 zu 1. Eben so verhalten sich auch die Umfänge oder Peripherien zweyer Kreise lediglich wie ihre Halbmesser oder Durchmesser.

Anwendung auf das Verjüngen der Figuren.

§. 31. Es wird nicht selten verlangt, daß man einen geometrischen Riß oder Plan wegen größerer

Deutlichkeit oder Schönheit 2mal auch 3mal größer, oder etwa der Bequemlichkeit willen eben so vielmal kleiner machen soll. Letzteres heißt eigentlich das Verjüngen der Figuren. Allein in wiefern es genau geometrisch, ohne fremde mechanische Hilfsmittel vollendet wird, beruht das Verjüngen auf demselben Grunde, wie das Vergrößern der Figuren.

Man muß nämlich, da der neu zu fertigende Plan mit dem alten genau ähnlich bleiben soll, zu jenem den richtigen Maßstab suchen. Nun sieht man aber aus dem im vorigen §. Gesagten ein, daß man den Maßstab zum neuen Risse, wenn derselbe z. B. 2mal größer, als der alte werden soll, nicht auch 2mal größer nehmen dürfe; denn sonst würde sich der neue Riß zum alten Riß, als ähnlicher Figur, wie das Quadrat von 2, d. i. wie 4 zu 1 verhalten, oder der neue Riß würde 4mal größer werden. Man muß also überhaupt einen Maßstab suchen, welcher gleichsam das Mittel zwischen dem doppelten und einfachen alten Maßstab hält. Dieses geschieht auf folgende Art:

Gesetzt man habe sich zur Fertigung des alten Risses des verjüngten Maßstabes Fig 59 bedient, wo man die Linie A 6 eine halbe Ruthe hätte bedeuten lassen. Wenn nun der neue Riß um das Doppelte vergrößert werden soll; so trage man auf einer geraden Linie ad Fig. 64. jene Linie A 6 2mal von a bis g und von g bis b, dann noch einmal von b bis d auf; suche das Mittel c der ganzen Linie ad; ziehe mit ca als Halbmesser aus c die halbe Kreislinie acd, und errichte

im Punkte b, wo der doppelte und einfache Maßstab verbunden wurden, eine senkrechte Linie be bis an die Peripherie; so wird nun be der neue gesuchte wahre Maßstab seyn, durch dessen Anwendung der neue Riß noch einmal so groß, als der alte, gefertigt wird, indem man nun be eine halbe Ruthe bedeuten läßt.

Denn man denke sich ae, ed gezogen; so ist jedes kleine Dreyeck z. B. bde ähnlich dem ganzen aed, indem der Winkel d gemeinschaftlich ist, und sowohl der Winkel aed, als Winkel im Halbkreise, als auch ebd ein rechter Winkel ist, demnach die Dreyecke wechselweise gleichwinklig, also ähnlich sind. Es sind daher auch beyde kleine Dreyecke aeb und bed ähnlich, folglich stehen ihre gleichliegenden Seiten in Proportion, d. i. es verhält sich ab zu be, wie be zu bd; oder be ist wirklich die mittlere Proportionallinie zwischen ab und bd, oder hält das Mittel zwischen dem doppelten und einfachen alten Maßstab.

Hätte der Plan z. B. 3mal kleiner werden sollen, als der vorhandene, für den nach Fig. 60. 10b eine Ruthe bedeutete; so hätte man an eine gerade Linie, welche gleich, 10b ist, das Drittel von 10b angestoßen, und nun zwischen, 10b und diesem Drittel, wie vorhin, die mittlere Proportionale gesucht, welche man dann für den neuen Plan eine Ruthe bedeuten ließe.

V. Von der Ausmessung der Figuren.

§. 32. Figuren oder begrenzte Flächenräume ausmessen, heißt finden, wie oft das zur Einheit

angenommene Maß in den Figuren enthalten sey. Dieses als Einheit angenommene Maß ist bey Flächen überhaupt das Quadratmaß, nämlich entweder der Quadratzoll, oder Quadratfuß, oder die Quadratruthe oder bey noch größeren Flächen die Quadratmeile. Unter einem jeden dieser Maße versteht man eine Quadratfläche, deren jede Seite entweder einen Zoll, oder Fuß, oder eine Ruthe oder Meile lang ist.

Es ist einleuchtend, daß eine Ebene, z. B. die Ebene eines Zimmerbodens, auf welcher man z. B. den Quadratfuß 30mal umherlegen könnte, 30 Quadratfuß Flächenraum haben müßte. Allein man sieht auch zugleich ein, daß ein solches Umherlegen einer Quadratfläche nicht nur beschwerlich, sondern bey größeren Flächen, die ausgemessen werden sollen, auch unthunlich sey. Die Geometrie lehrt uns daher, wie wir die Figuren blos dadurch ausmessen, daß wir von ihnen einen oder einige bestimmte Theile mit dem Längenmaße messen. Man muß sich aber hiebey dessen wohl erinnern, was ich von dem Längen- und Flächenmaße in der gemeinen Rechenkunst S. 62 — 64 gesagt habe. Um nun

1. ein **Quadrat** auszumessen, mißt man blos eine Seite z. B. ac Fig. 37 mit dem Längenmaße, und multiplizirt die Zahl, welche mir anzeigt, wie viel Schuh oder Ruthen diese Seite lang ist, mit sich selbst; das erhaltene Produkt sagt mir dann, wie viele Quadratschuhe oder Quadratruthen der ganze Flächenraum enthalte. Man pflegt diese Vorschrift sonst auch kurz so auszudrücken: man multiplizire eine Seite des Quadrats mit sich

selbst. Wenn z. B. ac 5' lang wäre; so wäre das Quadrat ad 25 Quadratfuß groß.

2. Den Flächenraum eines Rechteckes oder Oblongs Fig. 38. findet man, wenn man 2 aneinander stoßende Seiten, z. B. ed, df mit dem Längenmaße mißt, und die erhaltenen Zahlen miteinander multiplizirt. Wenn z. B. dg ein Stück Feld vorstellte, und de wäre gleich 30°, df aber = 15°; so wäre dessen Flächenraum = 30 × 15 = 450 Quadratruthen.

3. Den Flächenraum eines schiefwinkligen Parallelogramms Fig. 39. findet man, wenn man dessen Grundseite ab und Höhe cd ausmißt, und beyde erhaltene Zahlen miteinander multiplizirt.

4. Um daher den Flächenraum eines Dreyeckes z. B. Fig. 33. zu bestimmen, muß man die Grundseite ab mit der Höhe cd multipliziren, das Produkt aber durch 2 dividiren, weil das Dreyeck nur die Hälfte eines Parallelogramms mit derselben Grundseite und Höhe ist. Man kann auch die halbe Grundseite mit der Höhe, oder die Grundseite mit der halben Höhe multipliziren.

5. Wenn die Figur ein Trapez ist, wie Fig. 41.; so findet man den Flächenraum, wenn man beyde parallele Seiten ig, hi und ihren Abstand voneinander, oder die Höhe cd mißt; dann die halbe Summe der für jene Seiten erhaltenen Zahlen mit der für die Höhe gefundenen Zahl multiplizirt; oder wieder kurz ausgedrückt, wenn man die halbe Summe beyder parallelen Seiten mit ihrem Abstande voneinander multiplizirt. Denn durch die Diagonale ci erhält man 2 Dreyecke, deren Grundseiten sind

cg und hi, und deren gleiche Höhe ist cd. Statt also die Flächenräume beyder nach der Vorschrift unter 4) eigends zu messen, und dann dieselben zu addiren, verfährt man kürzer nach der gegebenen Vorschrift. Gesetzt hi sey = 12°, cg = 8°, und cd = 7°; so giebt $\frac{12+8}{2} \times 7$, oder die Zahl 70 den Flächenraum des Trapez zu 70 Quadratruthen an.

6. Ein Trapezoid, wie Fig. 42. oder ein Polygon überhaupt, wie Fig. 63. theilt man durch Diagonalen in einzelne Dreyecke; die Summe dieser berechneten Dreyecke giebt den Flächenraum jener Figuren.

Von der Ausmessung des Kreises.

§. 33. Um den Flächenraum eines Kreises zu finden, dürfte man vermöge §. 26. unter 5) nur die Peripherie desselben mit dem Halbmesser multipliziren, und dann durch 2 dividiren, oder, was nach der Vorschrift §. 32. 4) dasselbe ist, die Peripherie mit dem halben Radius, oder dem 4ten Theile des Durchmessers multiplizieren. Da nun zwar der Durchmesser eines vorgegebenen kleineren Kreises, nicht aber so fort auch die Peripherie, als krumme Linie, mit dem Längenmaße gemessen werden kann; so haben die Mathematiker auf zum Theil mühsamen Wege doch das für alle Kreise geltende Verhältniß des Durchmessers zur Peripherie wenigstens sehr nahe aufzufinden gesucht. Wenn d den Durchmesser und p die Peripherie irgend eines Kreises bezeichnet; so verhält sich d : p = 1 : 3,1415, (wo

man auch nur nehmen kann 3,14 oder 3,141) oder in ganzen Zahlen, wie 100 zu 314, oder genauer, wie 3000 zu 3141, oder in kürzeren Zahlen, wie 7 zu 22.

Man setze also, irgend eines Kreises Durchmesser wäre 4 Fuß, sein Halbmesser also = 2; so würde man setzen; wie sich verhält 1 zu 3,14, so verhält sich der bestimmte Durchmesser von 4′ zur gesuchten Peripherie. Man wird demnach mit Hilfe der Regel de Tri die Größe der Peripherie im Längenmaße, hier im Fußmaße auffinden, wenn man nur die Zahl 4 mit 3,14 multiplizirt, indem 1, wie man sagt, nicht dividirt. Da nun 4 × 3,14 = 12,56; so ist die Peripherie 12 ganze Fuß und 56 hunderttels Fuß lang. Um nun den Flächenraum dieses Kreises zu bestimmen; müßte man diese Zahl mit dem 4ten Theile des Durchmessers, d. i. hier mit 1 multipliziren; demnach hat dieses Kreises Fläche 12,56 Quadratfuß.

Sollte aus der gegebenen Peripherie eines Kreises dessen Durchmesser gefunden werden; so setzte man so: 3,14 : 1 = p : d, d. i. wie sich 3,14 zu 1 verhält; so verhält sich die gegebene Peripherie zum gesuchten Durchmesser. Häufige Anwendung findet diese Ausmessung des Kreises im folgenden Theile der Geometrie.

Der Geometrie Dritter Theil, oder die Stereometrie.

Von der Eintheilung der Körper überhaupt.

§. 34. Der körperliche Raum, durch dessen gänzliche Begrenzung der geometrische Körper entsteht, kann auf sehr mannigfaltige Weise begrenzt werden; es müssen also auch viele verschiedene geometrische Körper entstehen. Wenn man ihre Oberfläche betrachtet; so kann man die Körper in eckige und runde eintheilen. Eine Ecke entsteht aber am Körper, wenn aus drey oder mehreren ebenen Flächen geradlinige Winkel in demselben Punkte zusammenkommen; z. B. die Ecke c des durch Fig. 71. vorgestellten Körpers wird dadurch gebildet, daß aus 3 verschiedenen Ebenen die geradlinigen Winkel acd, dcb, acb zum Punkte c zusammenkommen. Eine solche Ecke nennt man auch körperliche Ecke, um sie von der Ecke bey Figuren zu unterscheiden, indem die letztere blos dadurch gebildet wird, daß 2 Seiten der Figur in einem Punkte zusammenstoßen.

Wenn die Oberfläche eines geometrischen Körpers aus lauter ebenen Figuren besteht; so nennt

man den Körper ganz eckig. Ein solcher ist der Würfel (Fig. 65.), das Prisma (Fig. 66), die Pyramide (Figg. 71. 72). Solche Körper haben zugleich Kanten; diese entstehen nämlich da, wo sich 2 Flächen in einer Linie schneiden. Der auf diese Art gebildete Winkel heißt Flächenwinkel; soviele sich dieser an der Oberfläche eines Körpers finden, so viele Kanten hat der Körper. Die oben genannte Körper könnte man rücksichtlich ihrer Flächenwinkel auch kantige Körper nennen. Nicht jeder Körper, der kantig ist, ist auch eckig; so hat die Walze (Figg. 69. 70.) 2 Kanten da, wo die krumme Oberfläche mit den 2 Kreisflächen sich schneidet. Man nennt ferner den Körper ganz rund, wenn seine Oberfläche eine einzige krumme Fläche ist, wie die Kugel (Fig. 78.). Allein die Walze, wie die Halbkugel (Fig. 79.) ist ein nicht völlig runder Körper.

Auch unterscheidet man platte und gewölbte Körper, in wiefern die Oberfläche derselben entweder ebene oder krumme Flächen enthält. Wenn der höchste Punkt der Wölbung dem betrachtenden Auge näher liegt, als die übrigen Wölbungspunkte; so nennt man die Körper erhaben- oder konvergewölbt; auf diese Art ist das menschliche Auge in seinem gesunden Zustande gewölbt. Liegt aber der höchste Wölbungspunkt entfernter, als die übrigen Punkte der krummen Fläche; so nennt man des Körpers Wölbung hohl oder koncav; so ist die Wölbung von Kellern, von Schwibbögen.

Die Flächen endlich selbst, welche den Körper begrenzen, sind entweder Grundflächen oder Seitenflächen. Grundfläche nennt man diejenige,

über welche man sich den Körper errichtet denkt. Wenn dieser 2 durchaus gleiche und parallele Flächen zur Grenze mit hat; so heißen beyde seine Grundflächen z. B. die Säule oder Walze hat die obere und untere Kreisfläche zu Grundflächen. Aber der Kegel (Fig. 75.) und die Pyramide (Fig. 71.) haben eine einzige Grundfläche; jener die Kreisfläche bdeb, diese das Dreyeck adb. In diesem Falle nennt man die der Grundfläche gegenüberstehende Ecke a oder c die Spitze des Körpers, und das Loth von dieser Spitze auf die Grundfläche oder auf deren Verlängerung heißt des Körpers Höhe. Hat aber der Körper 2 Grundflächen, so ist dessen Höhe diejenige gerade Linie, welche man von irgend einem Punkte der einen Grundfläche auf die andere oder auf deren Verlängerung senkrecht zieht; so ist in Fig. 70. de die Höhe der Walze.

Diejenigen Flächen, welche zwischen der Spitze und der Grundfläche, oder zwischen beyden Grundflächen liegen, und die Körper vollends begrenzen helfen, heißen dessen Seitenflächen. Der Kegel, wie die Walze hat eine einzige, aber z. B. der Würfel hat 4 Seitenflächen. Mit diesen darf man nicht die Seiten des Körpers verwechseln; denn hierunter versteht man blos gerade Linien und zwar bey eckigen Körpern, wie dem Würfel und der Pyramide, diejenigen geraden Linien, in welchen sich die Seitenflächen dieser Körper schneiden. Bey der Walze aber und dem Kegel nennt man Seite diejenige gerade Linie, welche man von einem Punkte der Peripherie der Grundfläche, oder von der Spitze zu einem andern Punkte der Peri-

pherie der unteren Grundfläche und zwar parallel mit der geraden Linie ziehen kann, welche entweder die beyden Mittelpunkte der Grundflächen, oder, wie beym Kegel blos die Spitze mit dem Mittelpunkte der Grundfläche verbindet. Diese gerade Linie heißt die Axe der Walze oder des Kegels.

Von den regulären eckigen Körpern.

§ 35. Diejenigen eckigen Körper heißen regulär, welche von ebenen regulären und kongruenten Figuren unter gleichen Flächenwinkeln begrenzt werden. Man hat 5 reguläre eckige Körper: 1 das reguläre Viereck (Tetraëder) Fig. 82; 2) das reguläre Achteck (Octoëder) Fig 84; 3) das reguläre Zwanzigeck (Ikosaëder) Fig. 85.; das erste wird von 4, das zweyte von 8, das dritte von 20 regulären und kongruenten Dreyecken begrenzt. — 4) Der Würfel (Kubus, oder das Hexaëder) Fig. 83., welcher von 6 gleichen Quadraten begrenzt wird; 5) das reguläre Zwölfeck (Dodekaëder), begrenzt von 12 regulären, kongruenten Fünfecken. Die einem jeden Körper in den vorhin genannten Figuren rechts beygezeichneten Figuren stellen die sogenannten Netze dieser Körper vor. Wenn man diese Netze auf Papendeckel oder dünnem Blech u. d. gl. verzeichnet, und diese Stoffe dann nach den gezeichneten Linien durchschneidet; so erhält man die zur Zusammensetzung eines dieser regulären Körper nöthigen Stücke.

Daß aber nicht mehrere ganz eckige Körper regulär seyn können, als die obigen fünf, sieht man so ein: a) 4 rechte Winkel können keine körperliche Ecke bilden, sondern liegen in einer Ebene, wie die 4 Winkel in Fig 43., welche von den senkrechten Durchmessern a b, c d am Mittelpunkte des Kreises gebildet werden; b) nun kommen bey dem regulären Zwanzigeck aus 5 verschiedenen regulären Dreyecken 5 geradlinige Winkel zur Ecke zusammen; ihre Summe ist 5mal 60°, d. i 300°; da diese noch nicht 360° oder 4 rechte Winkel machen; so ist jener Körper noch möglich. Allein man setze, daß 6 solcher Winkel zur Bildung der körperlichen Ecke zusammen kommen sollten; so würde die Summe dieser Winkel 6 × 60 d. i. 360° oder schon 4 rechte Winkel machen; also ist kein andrer von regulären Dreyecken begrenzter Körper außer den 3 oben angeführten möglich. Auf dieselbe Weise läßt sich darthun, daß, in wiefern Quadrate, oder reguläre Fünfecke die Grenzen sind, nur der Würfel und das Zwölfeck möglich seyen.

Begriff der Körpermessung.

§. 36. Unter Körpermessung versteht man eigentlich die Bestimmung oder die Auffindung des körperlichen Inhaltes oder der Solidität eines Körpers. Da es uns indessen auch in besondern Fällen nützlich ist, die Größe der Oberfläche eines Körpers zu kennen; so werde ich auch diese, aber nur für diejenigen Körper, in Ansehung welcher es schwieriger ist, die Oberfläche zu messen, zu

bestimmen lehren. Die Ausmessung der Oberfläche jener Körper, welche ebene und geradlinige Grenzen haben, geschieht nach den Vorschriften des §. 32.

Den körperlichen Inhalt eines geometrischen Körpers bestimmen, heißt finden, wie oft das als Einheit angenommene Maß in dem Körper enthalten ist. Das Maß aber, das hier zur Einheit angenommen wird, ist entweder die Cubikmeile, oder Cubikruthe, oder der Cubikschuh, oder Cubikzoll . . ., d. i. ein kleinerer Würfel, dessen jede Seite entweder eine Meile, oder Ruthe u. s. w. lang ist. Wenn man nun einen solchen Würfel, z. B den Cubikschuh 8mal in einen Körper hineinsetzen könnte, so, daß dessen ganze Grenze ausgefüllt würde; so würde man sagen, die Solidität dieses Körpers sey = 8 Cubikschuh. Nun ist aber dieses Hineinsetzen eines kleineren Würfels in einen Körper unthunlich; daher lehrt die Geometrie, wie man auch hier blos dadurch zum Ziele komme, daß man mit dem Langenmaße bestimmte Stücke am Körper ausmesse. Hiebey ist das nachzulesen, was in der gemeinen Rechenkunst vom Körpermaße gesagt wurde.

Vom Würfel.

§. 37. Da der Würfel Fig. 65. ein von 6 gleichen Quadraten begrenzter Körper ist; so darf man, um dessen Solidität zu finden, nur eine seiner Seiten AC zur dritten Potenz erheben, wie man kurz zu sprechen pflegt, oder man darf nur eine Seite mit dem Längenmaße messen, und die Zahl, welche anzeigt, wieviele Fuße oder Ruthen auf dieselbe ge-

hen, zweymal mit sich selbst multiplizieren, die so gefundene Würfelzahl giebt uns den körperlichen Inhalt des Würfels in Cubikschuhen oder Cubikruthen zu erkennen; wäre z. B. AC = 3′; so wäre des Würfels Solidität = 27 Cubikfuß. Denn der Würfel hat, wie jeder Körper, eine Ausdehnung in die Länge, Breite, und Tiefe oder Höhe; man müßte daher diese 3 Stücke messen, und miteinander multiplizieren, um seinen Inhalt zu finden: da sie aber einander gleich sind; so finde ich diesen schon dadurch, daß ich nur eines jener Stücke 2mal mit sich selbst multiplizire.

Vom Prisma.

§. 38. Prisma (Figg. 66. 67. 68.) ist derjenige geometrische Körper, welcher von 2 ebenen, geradlinigen, kongruenten und parallelen Grundflächen und von soviele Parallelogrammen, welche seine Seitenflächen heißen, begrenzt wird, als eine der Grundflächen Seiten hat. Das Prisma heißt dreyeckig Fig. 67., viereckig Fig. 66., fünfeckig Fig. 68. u. s. w. je nachdem die Grundflächen entweder Dreyecke, oder Vierecke u s. w. sind. Das viereckige Prisma, dessen Grundflächen auch Parallelogramme sind, führt den Namen eines Parallelepipedums, und zwar eines rechtwinkligen, in wiefern alle Parallelogramme Rechtecke sind, oder die Seitenflächen senkrecht auf den Grundflächen aufstehen. Sehr viele Körper, die wir täglich vor uns sehen, sind solche Prismen; z. B. die Mauern, beschlagene Balken zum Bauen,

die viereckigen Tafeln oder Tische, — Thüren, große Fensterscheiben, die Blätter dieses Buches u. s. w. Jede Seite cd (Fig. 66) eines solchen Prisma ist dessen Höhe. Allein bey denjenigen Prismen, deren Seitenflächen nicht senkrecht auf den Grundflächen aufstehen, wie in Fig. 67. muß die Höhe di oder das Loth eigends gezogen werden.

Um nun die Solidität eines Prisma zu finden, messe man nach einer der im § 32. gegebenen Vorschriften den Flächenraum der Grundfläche; die erhaltene Zahl multiplizire man mit der Zahl, welche anzeigt, wieviel Fuß oder Ruthen u. d. gl. in der Höhe enthalten sind; das gefundene Produkt giebt den körperlichen Inhalt des Prisma in Kubikschuhen oder Ruthen u. d. gl. an. Wobey zu bemerken ist, daß alle diese Zahlen gleichnamig seyn müssen; z. B. wenn die Grundfläche eines Prisma in Quadratruthen, die Höhe aber in Schuhen ausgedrückt wäre; so würde man jene Ruthen in Fuße verwandeln und dann erst mit der letzteren Zahl multiplizieren müssen. Sonst spricht man auch hier wieder, man multiplizire Höhe, Länge und Breite miteinander; der Geometer sagt kurz: man multiplizire die Grundfläche mit der Höhe; so hat man des Prisma Solidität.

Beysp. 1. Sollte man eine Mauer, welche ein rechtwinkliges Parallelepipedum vorstellt, ausmessen; so würde man mit dem Längenmaaße 1) die Länge, 2) die Dicke oder Tiefe, 3) ihre Höhe messen. Jene erste sey $= 3° 4'$ oder $= 40'$, die 2te $= 2'$, die Höhe $= 8'$; so gäbe $40 \times 2 = 80$ Quadratfuß die Grundfläche der Mauer; dann

80 × 8 = 640 zeigte in Cubikfußen die Solidität der Mauer. Wäre nun akkordirt, wie ich in der gemeinen Rechenkunst S. 65. angemerkt habe; so müßte man 640 durch 144 dividiren, um die für das Errichten der Mauer zu zahlende Summe zu finden.

Beysp. 2. Wieviel Cubikschuh Flüßigkeit hält z. B. ein steinerner Behälter, welcher entweder in Gestalt eines viereckigen senkrechten Prisma, oder genau würflig gehauen ist? In diesem letzten Falle braucht man nur eine Seite der inneren Höhlung zu messen und dann nach § 37. zu verfahren; im ersten Fälle aber müßte man Länge, Breite und Höhe oder Tiefe des Behälters von innen messen, und dann die 3 gleichnamigen Zahlen miteinander multiplizíren. Würde man nun die erhaltene Zahl in Cubikzollen ausdrücken, und diese dann, weil ein Würzburger Eichmaaß 81,22969, oder der Eimer 5198,70016 Cubikzolle hält, nur durch die runde Zahl 81, oder 5199 dividiren; so würde man sehr nahe finden, wieviel Maße oder Eimer Flüßigkeit der Behälter fasse.

Beysp. 3. Eine anders nützliche Frage ist: welche Tiefe muß ein Behälter bekommen, welcher z. B. 3 Eimer Wasser fassen soll? 3 Eimer machen beynahe 15597 Cubikzoll. Soll nun der Behälter ein Würfel seyn; so zieht man aus 15597 blos die dritte oder Cubikwurzel aus; diese findet man beynahe = 25″, also muß dieser Behälter soviel Zoll oder 2′ 1″ tief, lang und breit seyn. Wenn aber der Behälter prismatisch gehauen, und z. B. dessen innere Länge = 2′ 7″ = 31″, die Breite =

1′ 8″ = 20″ seyn sollte; so giebt das Produkt 620 Quadratzolle die innere Grundfläche des Behälters. Wenn man nun jene Zahl 15597 durch 620 dividirt; so zeigt der beyläufige Quotient 25, daß man die Tiefe des Behälters zu 25 Zoll und einigen Linien nehmen müsse, damit er jene Quantität Wassers fasse.

Vom Cylinder.

§. 39. Der Cylinder (Figg. 69. 70.), den man auch bisweilen Walze, bisweilen Rundsäule nennt, ist derjenige geometrische Körper, welcher 2 kongruente und parallele Kreise zu Grundflächen hat, und von einer solchen Zwischenfläche vollends begrenzt wird, daß alle gerade Linien, welche man mit der Axe cc parallel von irgend einem Punkte der Peripherie der einen Grundfläche zur Peripherie der andern ziehen mag, ganz in derselben Fläche liegen. Jedes, auch nur etwas größere, Faß ist kein Cylinder; denn wenn auch beyde Faßböden gleich sind; so sind doch die Tauben gekrümmt, so, daß man von dem Umfange des einen Faßbodens keine gerade Linien zum Umfange des anderen ziehen kann. — Wenn die Axe cc selbst die Höhe des Cylinders, oder auf dessen Grundflachen senkrecht ist; so heißt der Cylinder ein senkrechter oder gerader; sonst ein schiefer, wo das eigends zu ziehende Loth d[illegible] die Höhe ist.

Da des Cylinders Grundflächen, welche Kreise sind, als reguläre Vielecke von unendlich vielen Seiten betrachtet werden können, und man sich daher zwischen je 2 solchen Seiten der oberen und unteren

Grundfläche ein Parallelogramm errichtet denken kann, so, daß die Zwischenfläche des Cylinders in unendlich viele Parallelogramme verwandelt wird; so sieht man ein, warum man sagen kann, der Cylinder sey ein unendlicheckiges Prisma; man finde daher erstens dessen Solidität, wie die des Prisma, wenn man eine seiner Grundflächen mit der Höhe des Cylinders multiplizire.

Beysp. 1. Viele Körper, z. B. unsere Getraid- und Getränkgemäße, runde Scheiben und Stangen, Röhren, Wellbäume u. d. gl. haben die vollkommene Gestalt von geraden Cylindern. Den körperlichen Inhalt aller dieser Körper findet man auf dieselbe Art, wie man ihn für einen dicken, oben durchgesägten Eichstamm, den wir hier zum Beyspiel wählen, findet. Der einzige Unterschied ist dieser, daß solche Baumstämme, wenn sie etwas lang sind, auch wenn man nach dem Fällen den oberen dünnern Theil weggesägt hat, doch keine vollkommne Cylinder oder Walzen sind. Man sucht daher, um weniger in der Berechnung der Grundfläche zu irren, den mittleren Durchmesser, indem man die Zahlen für den gemessenen oberen und unteren Durchmesser addirt, und die Summe halbirt. Man setze nun, dieser mittlere Durchmesser sey = 20″, des Cylinders Höhe oder Länge = 26′ oder = 312″; so sucht man erst die Peripherie p nach §. 33, indem man setzt 1 : 3,14 = 20″ : p; woraus man p = 62,8″ findet. Wenn man diese Zahl mit dem 4ten Theile des Durchmessers, d. i. mit 5 hier multiplizirt; so zeigt das Produkt 314 die Größe der Grundfläche jenes Eichbaumes in

Quadratzollen. Man hat daher dessen Solidität, wenn man 314 noch mit 312 (der Länge) multiplizirt. Man findet 97968 Cubikzoll, oder wenn man durch 1728 dividirt; so ist dieses Stammes Solidität = 56 Cubikfuß und 1200 Cubikzoll.

Beysp. 2. Man soll den körperlichen Inhalt einer bleyernen Röhre, wie man solche zu Wasserleitungen oder Springbrunnen gebraucht, finden; die Metalldicke sey 8 Linien, die Röhre 1 Fuß im Lichten weit, und 20′ lang. – Man könnte hiebey so verfahren: man berechnete die Solidität der Röhre, als wäre sie ein ganzer unausgehöhlter Cylinder; dann berechnete man auch den kleinen ausgebohrten, oder in die Oeffnung passenden Cylinder; zöge dessen Solidität von jener zuerst gefundenen ab; so gäbe der Rest die Solidität der Röhre. Allein statt dieser etwas weitläuftigen Methode verfahre man nach folgender Vorschrift:

1) Man addire den Halbmesser der Oeffnung, nämlich $\frac{1}{2}$ oder 72″ zu dem Halbmesser der ganzen Röhre, als wäre sie ein unausgehöhlter Cylinder. Da nun der Durchmesser gleich ist dem Durchmesser der Höhlung und der doppelten Metalldicke, d. i. 1′ + 16‴; so ist der Halbmesser = $\frac{1}{2}$ + 8‴ = 80‴. Demnach die Summe dieser Halbmesser = 152‴; — 2) ziehe man von dem größeren Halbmesser den kleineren ab; die Differenz ist hier 80‴ – 72‴ = 8‴; – 3) dann multiplizire man ene Summe mit eben dieser Differenz, und dieses Produkt aus 152 in 8, oder 1216 multiplizire man auch mit der Länge oder mit 20′ = 2880‴; man findet 3502080; endlich multiplizire man dieses

Produkt noch mit der Zahl 3,14; so erhält man nach Weglassung der Decimalstellen 10996531 Cubiklinien, oder diese Zahl durch 2985984 dividirt, beynahe 3 Cubikfuß und 1037 Cubikzoll, oder $3\frac{3}{5}$ Cubikfuß zum Inhalt der bleyernen Röhre.

Wenn man nun annimmt, daß das Bley 11mal schwerer, als Wasser sey, und ein Cubikfuß Wasser 64 lb., folglich 1 Cubikfuß Bley 11×64, d. i. 704 lb. wiege; so kann man den Werth dieser bleyernen Röhre finden. Denn das Gewicht der ganzen Röhre ist $= 3\frac{3}{5}$ oder $\frac{18}{5} \times 704 = 2534\frac{2}{5}$ lb. Wenn man daher den Werth eines Pfundes Bley zu 9 kr. annimmt; so berechnet man den Werth dieser Röhre zu 380 Gulden $9\frac{3}{5}$ kr.

Wenn man zweytens die krumme Oberfläche eines Cylinders oder einer Rundsäule finden will, zu dem Endzwecke etwa, damit man den Preis der Vergoldung oder der Verkleidung derselben überhaupt berechnen könne, so bald man weiß, wieviel ein Quadratzoll, oder Quadratfuß kostet; so mißt man den Durchmesser der Säule, und sucht zu diesem Durchmesser, wie im 1sten Beyspiele, die Größe der Peripherie; diese erhaltene Zahl multiplizirt man denn mit der Länge oder Höhe der Säule.

Von der Pyramide und dem Kegel.

§. 40. Die Pyramide (Figg. 71. 72.) ist derjenige geometrische Körper, welcher eine ebene geradlinige Figur zur Grundfläche, und soviele in der Spitze der Pyramide zusammenlaufende Dreyecke zu Seitenflächen hat, als vielseitig

kig die Grundfläche selbst ist. Je nachdem eben diese entweder ein Dreyeck, oder Viereck . . . oder überhaupt ein Vieleck ist, heißt auch die Pyramide entweder dreyeckig, oder viereckig . . . oder überhaupt vieleckig.

Der Kegel (Figg. 74. 75.) ist dagegen von einer Kreisfläche, als Grundfläche, und von einer solchen Oberfläche zwischen der Spitze und der Grundfläche begrenzt, daß alle geraden Linien, welche von der Spitze zur Peripherie der Grundfläche mit des Kegels Axe ac parallel gezogen werden, in derselben Fläche liegen. Wenn man des Kegels Grundfläche wieder als ein reguläres Vieleck von unendlich vielen Seiten betrachtet, und auf jeder derselben sich ein ebenes Dreyeck, dessen Spitze die Spitze der Pyramide selbst ist, errichtet vorstellt; so sieht man ein, warum man den Kegel auch als Pyramide, und zwar als unendlicheckige Pyramide betrachten könne.

Man nennt den Kegel senkrecht oder gerade (Fig. 74.), wenn die Axe ac senkrecht auf der Grundfläche aufsteht, oder selbst die Höhe des Kegels ist; sonst ist der Kegel schief, wie Fig. 75., wo ai die Höhe vorstellt. Eben so kann man sich auch die Mitte der Grundfläche einer Pyramide durch eine gerade Linie mit deren Spitze verbunden vorstellen, demnach auf gleiche Weise die senkrechte Pyramide von der schiefen unterscheiden.

Wenn man sich endlich die Pyramide oder den Kegel in irgend einem Abstande von der Grundfläche parallel mit dieser durchschnitten denkt, so, daß der obere Theil mit der Spitze wegfällt; so heißt der

übrigbleibende, von 2 parallelen Ebenen begrenzte, Theil die abgekürzte Pyramide oder der abgekürzte Kegel, oder Stumpf (Figg. 76. 77.). Viereckige abgekürzte Pyramiden, deren fehlende Theile durch irgend einen anderen Aufsatz z. B. einer Urne, vom Bildhauer gearbeiteten Figur, in einem richtigen Verhältniße zu den unteren Theilen ersetzt werden, dienen häufig als Verzierungen öffentlicher Plätze u. d. gl. Die Gestalt abgekürzter Kegel aber haben größtentheils die Baumstämme bis zu demjenigen dünneren Theile, welchen man zu Bau- oder Scheitholz nicht mehr brauchen kann. Sollte der Stamm sehr dick seyn, und daher dessen unterer Theil bis zu einer gewissen Länge oder Höhe beynahe ganz cylinderförmig seyn; so muß dieses Theiles Solidität nach §. 39., aber der übrige Theil als abgekürzter Kegel berechnet werden.

Die Solidität der ganzen Pyramide, demnach auch die des Kegels, findet man, wenn man die Grundfläche (wie man kurz spricht), mit der Höhe multiplizirt, und das Produkt durch 3 dividirt. Denn man kann jedes Prisma in 3 gleiche Pyramiden theilen, so daß also jede Pyramide als der dritte Theil eines Prisma mit derselben Grundfläche und Höhe, der Kegel folglich als dritter Theil eines gleich hohen Cylinders, über derselben Grundfläche errichtet, betrachtet werden kann. Beyde Berechnungen macht man also ganz nach §. 38. und §. 39.

Allein die Solidität eines abgekürzten geraden Kegels Fig. 77. kann man auf 2erley Art finden: 1) indem man die ganze Höhe dC durch die Pro-

portion: wie sich der Unterschied der beyden Halbmesser, AC, ac zum größeren Halbmesser AC verhält; so verhält sich die Höhe cC des Stumpfes zur ganzen Höhe dC, die man sucht; die 3 ersten Stücke der Proportion kann man durch unmittelbare Messung, also das 4te unbekannte Stück durch Rechnung finden. Die Richtigkeit jener Proportion sieht man so ein: man denke sich ab parallel mit cC oder dC gezogen; so ist das kleine Dreyeck Aab ähnlich dem ganzen AdC; demnach sind die gleichliegende Seiten in Proportion, oder es verhält sich Ab (= AC — bC = AC — ac) zu AC, wie ab (= cC) zu dC. — Indem man demnach die untere große Kreisfläche berechnet, die Zahl mit der Zahl von Fußen u. d. gl., welche man für dC gefunden hat, multiplizirt, und durch 3 dividirt; hat man den Inhalt des Kegels, wovon kein Theil fehlt. — Wenn man nun von dC = cC abzieht; so hat man die Höhe dc des fehlenden Theiles; diese dann auch mit der oberen berechneten Kreisfläche, wovon ac der Halbmesser ist, multiplizirt und durch 3 dividirt, erhält man auch den Inhalt des fehlenden Stückes. Wenn man endlich diesen Inhalt vom Inhalte des ganzen Kegels abzieht; so erhält man die gesuchte Solidität des Stumpfes.

2) Kürzer und leichter verfährt man nach folgender Vorschrift: a) man erhebe die Summe AC + ac beyder Halbmesser zum Quadrat, oder multiplizire sie mit sich selbst; b) ziehe dann das Produkt beyder Radien AC × ac von jener Quadratzahl ab; c) multiplizire den gefundenen Unterschied so-

wohl mit der Höhe cC, als auch mit der Zahl 3,14; d) und dividire endlich dieses ganze Zahlenprodukt durch 3.

Beyspiel. Man soll den körperlichen Inhalt eines noch nicht umgehauenen Baumes finden, dessen Höhe ist 85′ (wie sie etwa geschätzt wird), dessen gemessener unterster Umfang ist = 7′ 8″ und dessen oberster Umfang = 12″.

Ein solcher Baum kann etwa bis auf 16′ Höhe noch ganz cylindrisch angenommen, daher wie ein Cylinder berechnet werden. Man sucht aus dem Umfang den unteren Durchmesser nach §. 33. durch die Proportion: 3,14 : 1 = 7′ 8″ (oder 92″) : d; woraus man, indem man 92″ durch 3,14 dividirt, den Durchmesser = 29, 3″ findet. Der 4te Theil davon ist 7,3″ beynahe; folglich die untere Grundfläche des Cylinders = 92″ × 7,3″ = 692 Quadratzolle beynahe. Daher diese Zahl mit der Höhe von 16′ oder 192″ multiplizirt; hat man die Solidität des Cylinders = 132864 Cubikzoll.

Man hat also nun noch den abgekürzten Kegel von 85 — 16, d. i. 69 Fuß oder 828 Zoll Länge oder Höhe zu berechnen. Der größte Durchmesser ist 29,3″, den kleinsten oberen findet man, wie vorhin aus dem Umfange, = 3,8″; also ist die Summe beyder Halbmesser = 14,6 + 1,9 = 16,5″; das Quadrat hievon = 272,25; davon das Produkt beyder Halbmesser, nämlich 55,48 abgezogen, hat man 216,77 Multiplizirt man nun diese Differenz mit der Höhe 828 und auch mit 3,14; so findet man 563584,6584; diese Zahl end-

lich noch durch 3 dividirt, erhält man zum körperlichen Inhalt dieses abgekürzten Kegels 187861,5528 Cubikzoll, folglich hiezu den vorhin berechneten Inhalt des Cylinders, oder 132864 addirt, ist die Solidität des ganzen Baumes = 320725,5528 Cubikzoll oder = 185,6 Cubikfuß (indem man nämlich jene Zahl durch 1728 Cubikzoll = 1 Cubikfuß dividirt).

Anmerkung. Das Waldklafter oder der Reifholz, wo die Scheite 3′ lang sind, hat bey uns 75 Cubikschuh. Wegen des Zwischenraumes, den die einzelnen Scheite lassen, braucht man zu einem Klafter Holz nur 67 Cubikschuh Stammholz. Der vorhin berechnete Baum würde daher $2\frac{4}{5}$ Klafter Scheite geben. Da man nun auf 25 Klafter Stammholz noch 5 Klafter Armholz rechnet; so ist klar, wie der Oekonom jeden Baumstamm leicht taxiren könne.

Auf eine ähnliche Art, wie den abgekürzten Kegel berechnet man auch den kubischen Inhalt der abgekürzten Pyramide (oder eines Obelisken bis zur aufgesetzten Spitze); man erhebt nämlich die Summe von 2 parallelen Seiten der 2 parallelen Ebenen zum Quadrat, zieht hievon das Produkt aus beyden Seiten ab; multiplizirt die gefundene Differenz mit der unteren Grundfläche und mit der Höhe der abgekürzten Pyramide, und dividirt endlich dieses Produkt durch das 3fache Quadrat eben jener größeren Seite der unteren Grundfläche:

Von der Kugel.

§. 41. Die **Kugel** Fig 78. ist derjenige geometrische Körper, dessen Oberfläche überall von einem Punkte c, dem **Mittelpunkte** der Kugel, gleichweit absteht. Jede gerade Linie von der Oberfläche zu diesem Punkte gezogen, heißt **Kugel-Halbmesser**, und der doppelte Halbmesser als eine gerade Linie heißt **Kugeldurchmesser**. Jeder Kreis, dessen Mittelpunkt der Kugelmittelpunkt selbst ist, heißt ein **größter Kugelkreis**; dieser theilt die Kugel in 2 gleiche Theile, oder Halbkugeln (**Hemisphärien**); Fig. 79 stellt eine Hemisphäre vor. Jedesmal aber, wenn man die Kugel so durchschneidet, daß die Figur des Schnittes eine Kreisfläche ist; so erhält man 2 **Kugelabschnitte**, wie a und b Fig. 80.; schneidet man aber von 2 Seiten nach der Richtung zweyer Kugelhalbmesser, welche einen schiefen Winkel bilden, durch; so erhält man einen **Kugelausschnitt** Fig. 81.

Wenn man sich einen hohlen Cylinder vorstellt, der den Durchmesser einer Kugel zur Höhe und zum Durchmesser seiner Grundfläche hat; so füllt jene Kugel, in dieses Cylinders Höhlung eingesenkt, gerade zwey Drittel dieses Cylinders aus; daher sagt der Geometer: die Kugel sey 2 Drittheilen eines um sie geschriebenen Cylinders gleich. Wenn man also den Kugeldurchmesser weiß; so kann man auch leicht nach §. 33. den Flächenraum eines größten Kugelkreises, oder der Grundfläche jenes Cy-

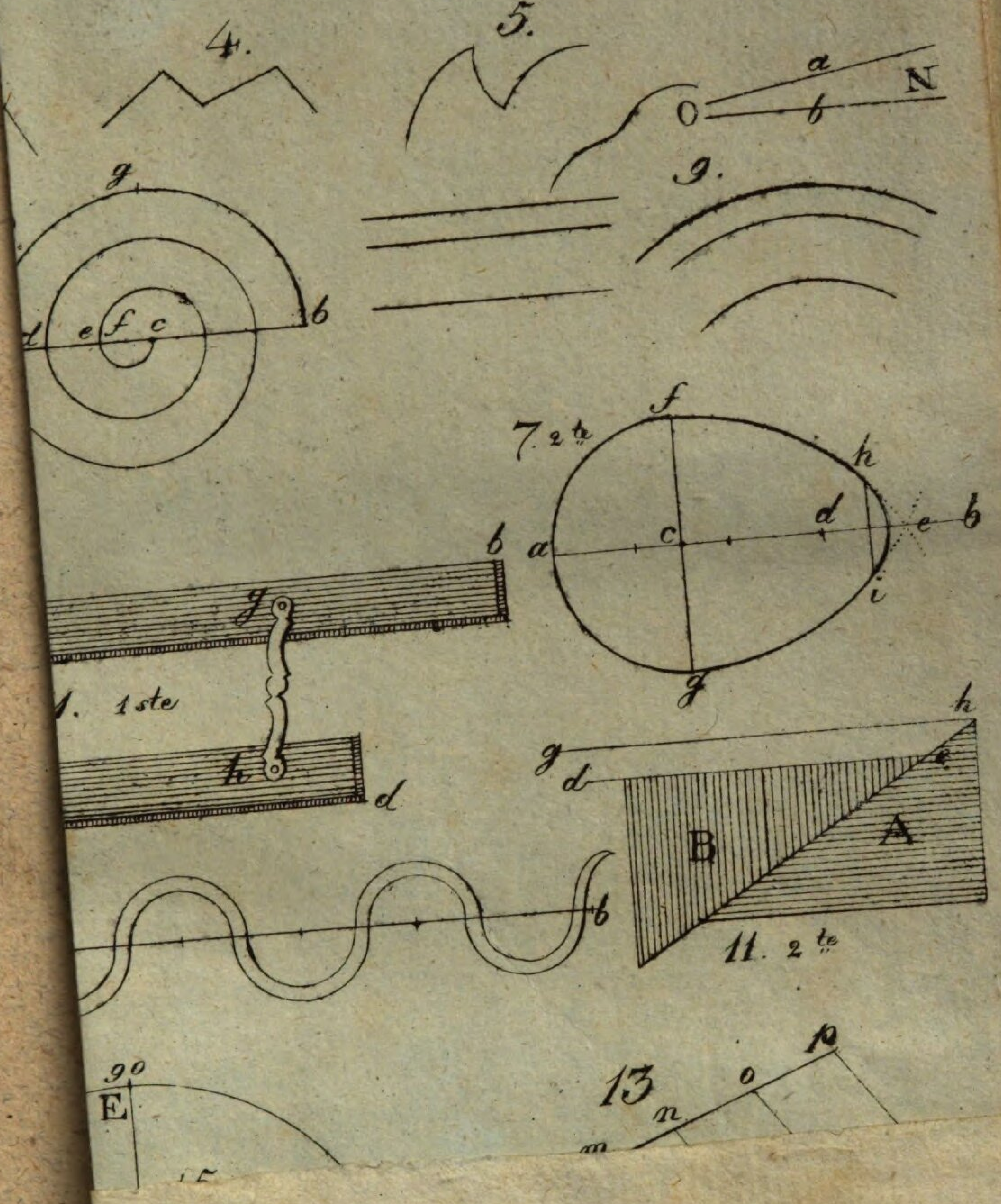
linders finden. Dieser Flächenraum, mit der Höhe des Cylinders, oder dem Durchmesser der Kugel multiplizirt, giebt den körperlichen Inhalt eben jenes umschriebenen Cylinders. Wenn man demnach blos die Solidität der Kugel kennen will; so muß man von jenem Inhalte noch $\frac{2}{3}$ nehmen, oder denselben mit $\frac{2}{3}$ multipliziren.

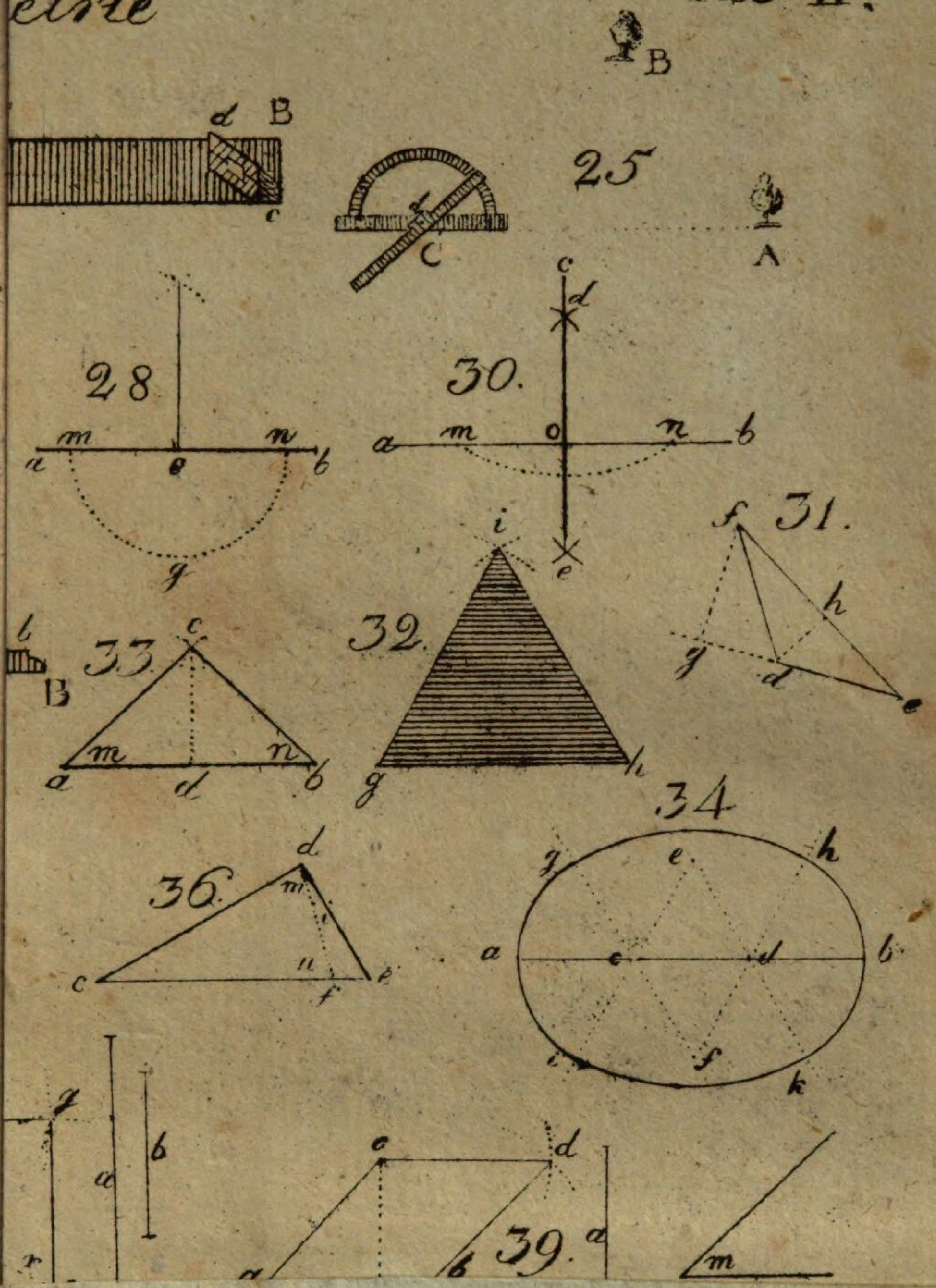
Beyspiel. Die Erde hat beynahe vollkommen die Kugelgestalt; ihren Halbmesser giebt man zu 85 $\frac{1}{2}$, oder in runder Zahl zu 860, und ihren Umfang zu 5400 geographischen Meilen an; jede dieser Meilen hat nämlich beynahe 3811 französische Klafter, oder 22866 französische Fuße. Die Hälfte des Erdhalbmessers, oder der 4te Theil des Durchmessers ist also = 430 solcher Meilen; wenn man demnach den Erdumfang oder 5400 mit dieser Zahl 430 multiplizirt; so findet man den Flächenraum eines größten Erdkreises = 2322000 geogr. Quadr. Meilen. Diese Zahl nun mit dem ganzen Erddurchmesser = 1719 (geogr. Meilen) multiplizirt, giebt die Solidität des um die Erdkugel gleichsam umschriebenen Cylinders = 3991518000. Von dieser Zahl müssen nun $\frac{2}{3}$ genommen, oder diese Zahl muß mit 2 multiplizirt und dann durch 3 dividirt werden, um den körperlichen Inhalt der Erde zu finden; die Rechnung giebt diesen = 2661012000 geogr. Cubik-Meilen. Hieraus lernen wir, daß der Erdkörper so groß ist, daß man über zweytausend Millionen Würfel, wovon eines jeden Seite eine geogr. Meile oder 22866. französische oder 23661 rheinländische Fuße lang ist, gleichsam in dessen äußerste Hülle setzen könnte.

Die Oberfläche einer Kugel ist gleich den Flächenräumen 4 größter Kugelkreise. Will man daher die Erdoberfläche finden, so muß man obige Zahl 2322000 noch mit 4 multipliziren; dieß giebt 9288000 geogr. Quadrat-Meilen = der ganzen Erdoberfläche.

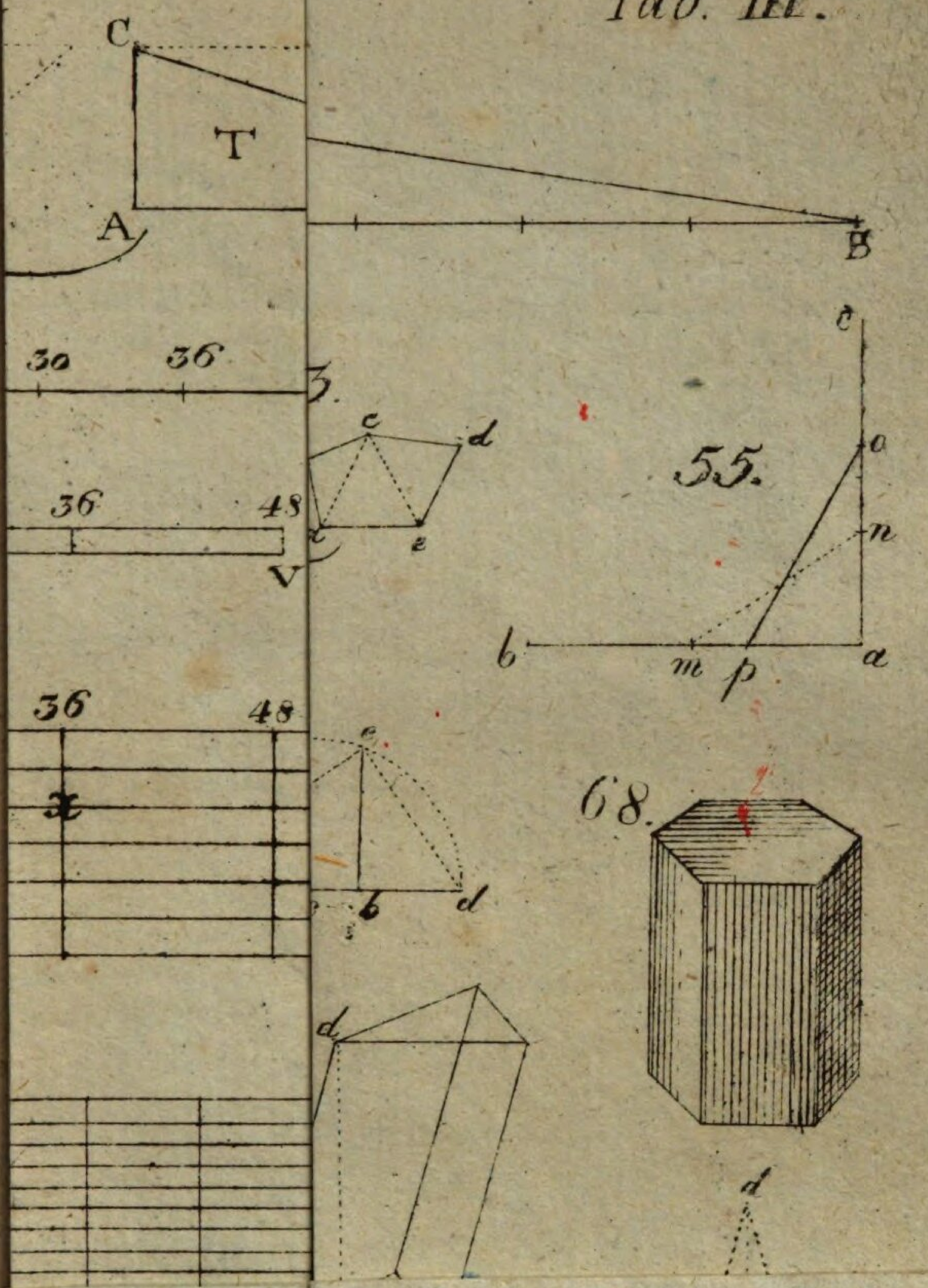
rie.

Tab. I.




25
28.
30.
31.
32.
33.
34
36.
39.

Tab. III.



Schön, Johann,

Kurzer und faßlicher Unterricht in der Rechenkunst, Geometrie, praktischen Mechanik und Statik, und bürgerlichen Baukunst für Buerger- und Sonntags-Schulen, u. zunächst für d. großherzogl. Geometrie- u. Zeichenschule
Bd.: 2. Die Geometrie ... - 1812. - 91 S. : Ill.

Würzburg 1812

Regensburg, Staatliche Bibliothek -- 999/Philos.2333(1/2
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11111100-4